

3. Основы оптимального приёма сигналов

Материал данного раздела курса, в котором рассматриваются вопросы оптимального приёма, принципиально отличается от материала предыдущего раздела тем, что если раньше решались задачи *анализа* прохождения смеси сигнала и шума через приёмный тракт, то теперь будут рассматриваться методы *синтеза*^{*)} оптимальных (т.е. наилучших в некотором смысле) приёмников.

Следует сразу оговориться, что в теории оптимального приёма сигналов оптимальность понимается довольно узко: имеется в виду наилучшее выделение информации из сигнала, принимаемого в смеси с помехами. При этом главным образом рассматриваются аддитивные шумовые помехи, имеющие нормальное распределение вероятностей. Именно такие помехи мы и будем рассматривать в этой части курса. При таких условиях оптимальным будет приёмник, имеющий наилучшую шумовую чувствительность.

Правило, по которому определяется, какое выделение полезной информации считается наилучшим, называется *критерием оптимальности* приёмника. Выбор и обоснование критерия оптимальности – отдельная задача, и мы ей заниматься не будем. Критерий оптимальности обычно задают исходя из назначения приёмника.

Оптимальный приёмник обеспечивает минимально возможный уровень искажений при извлечении полезной информации, заключённой в принимаемом сигнале. Этот минимальный уровень искажений называют *потенциальной помехоустойчивостью* приёмника. Сравнивая помехоустойчивость реального приёмника с потенциальной, можно оценить степень его совершенства и возможные резервы повышения помехоустойчивости.

В рамках теории оптимального приёма решаются следующие основные задачи:

- 1) оценивание (измерение) параметров сигнала, принимаемого в смеси с помехами;
- 2) обнаружение сигнала на фоне помех;
- 3) различение двух или нескольких сигналов на фоне помех;

^{*)} Под синтезом понимается нахождение структуры и параметров устройства, предназначенного для приёма определённого типа сигналов в условиях действия помех.

4) выделение сигнала из смеси с помехами (фильтрация сигнала).

Мы рассмотрим первые три задачи, причём в дальнейшем будет показано, что обнаружение и различение сигналов – это частный случай задачи оценивания параметров сигнала. Поэтому мы начнём именно с этой задачи.

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

Поскольку шумовые помехи имеют случайный характер, то для построения оптимальных приёмных устройств используются разработанные в математической статистике методы проверки статистических гипотез и оценивания параметров. Здесь важную роль играют понятия *априорной* и *апостериорной* вероятностей, а также *функции правдоподобия* параметра. Рассмотрим эти понятия.

Пусть на входе приёмника действует аддитивная смесь (сумма) сигнала $s_\lambda(t)$, зависящего от параметра λ , и шума $n(t)$, т.е. реализация смеси сигнала и шума:

$$y(t) = s_\lambda(t) + n(t).$$

Будем считать, что сигнал известен полностью, за исключением одного неизвестного параметра λ . В значении этого параметра и заключается та полезная информация, которую содержит сигнал. При этом параметр λ считается случайным и поэтому, как всякая случайная величина, он характеризуется своим распределением вероятностей.

До начала приёма и обработки смеси сигнала и шума известно следующее:

- вид сигнала $s_\lambda(t)$ (в виде аналитического выражения, в котором известны все параметры, кроме измеряемого параметра λ);
- распределение вероятностей шума;
- априорное^{**)} распределение вероятностей параметра λ .

Из-за наличия шумовой помехи оптимальный приёмник в принципе не может определить истинное значение параметра λ . Он может лишь найти распределение вероятностей этого параметра. Это распре-

^{**)} «Априорное» означает «доопытное», «известное заранее». Этот термин происходит от латинского выражения *a priori* – «из предыдущего».

деление вероятностей называется апостериорным^{***}). Апостериорное распределение вероятностей принципиально отличается от априорного тем, что оно зависит от того, какая реализация смеси сигнала и шума принята и обработана. Далее будем считать, что параметр может принимать непрерывное множество значений, и характеризовать его распределение вероятностей плотностью вероятности.

Рассмотрим методику вычисления апостериорной плотности вероятности параметра сигнала в том случае, когда принимаемая смесь сигнала и шума представлена N отсчётами y_1, y_2, \dots, y_N , которые образуют вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$:

$$\vec{y} = \vec{s}_\lambda + \vec{n}.$$

Здесь \vec{s}_λ – вектор отсчётов сигнала, \vec{n} – вектор отсчётов шума. Определение апостериорной плотности вероятности основано на *формуле полной вероятности*, в соответствии с которой совместная плотность вероятности $w(\lambda, \vec{y})$ параметра λ и вектора отсчётов \vec{y} может быть записана двумя способами:

- 1) как произведение условной плотности вероятности отсчётов принятого колебания $w(\vec{y} | \lambda)$, вычисленной при условии, что параметр имеет некоторое конкретное значение λ , на априорную плотность вероятности параметра $w(\lambda)$:

$$w(\lambda, \vec{y}) = w(\vec{y} | \lambda) \cdot w(\lambda);$$

- 2) как произведение условной плотности вероятности $w(\lambda | \vec{y})$ параметра λ , вычисленной при условии, что отсчёты принятого колебания имеют конкретные значения y_1, y_2, \dots, y_N , (апостериорной плотности вероятности) на плотность вероятности отсчётов $w(\vec{y})$:

$$w(\lambda, \vec{y}) = w(\lambda | \vec{y}) \cdot w(\vec{y}).$$

В дальнейшем, для единообразия, будем обозначать априорную плотность вероятности параметра $w(\lambda)$ как $w_{pr}(\lambda)$, а апостериорную плотность вероятности $w(\lambda | \vec{y})$ – как $w_{ps}(\lambda)$. Тогда из формулы полной вероятности следует равенство

$$w_{ps}(\lambda) \cdot w(\vec{y}) = w(\vec{y} | \lambda) \cdot w_{pr}(\lambda),$$

^{***}) «Апостериорное» означает «послеопытное». Этот термин происходит от латинского выражения *a posteriori* – «из последующего».

которое даёт следующее выражение для апостериорной плотности вероятности параметра:

$$w_{ps}(\lambda) = \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y} | \lambda) w_{pr}(\lambda)$$

(в теории вероятностей и математической статистике это выражение называется *формулой Байеса*).

При вычислении апостериорной плотности вероятности параметра значения отсчётов $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ принимаемого колебания фиксированы. Кроме того, в задачах оптимального приёма сигналов требуется определить не абсолютное значение апостериорной плотности вероятности, а относительное, которое необходимо для сравнения $w_{ps}(\lambda)$ при различных значениях λ . Поэтому сомножитель $\frac{1}{w(\vec{y})}$ мож-

но заменить константой c_1 (здесь индекс «1» в обозначении c_1 использован в связи с тем, что позднее будут введены и другие константы):

$$w_{ps}(\lambda) = c_1 \cdot w(\vec{y} | \lambda) w_{pr}(\lambda).$$

Поскольку априорная плотность вероятности параметра $w_{pr}(\lambda)$ считается известной, то для определения апостериорной плотности вероятности $w_{ps}(\lambda)$ нужно найти условную плотность вероятности $w(\vec{y} | \lambda)$. Рассмотрим её более подробно.

При вычислении апостериорной плотности вероятности значения отсчётов $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ принимаемого колебания фиксированы. Поэтому условная плотность вероятности $w(\vec{y} | \lambda)$ является функцией только параметра λ . Эта функция, занимающая центральное место в математической статистике и в теории оптимального приёма, называется *функцией правдоподобия параметра* и обозначается $L(\lambda)$ (от англ. *Likelihood* – правдоподобие):

$$L(\lambda) = w(\vec{y} | \lambda).$$

Функция правдоподобия параметра – это условная плотность вероятности отсчётов принимаемого колебания $w(\vec{y} | \lambda)$, рассматриваемая как функция параметра λ .

Таким образом, с точностью до константы апостериорная плотность вероятности параметра λ равна произведению априорной плотности вероятности на функцию правдоподобия:

$$w_{ps}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda).$$

Поскольку при обработке принимаемого колебания априорная плотность вероятности параметра λ считается известной, то задача оптимального приёмника сводится к вычислению функции правдоподобия. Наиболее простой вид она имеет в том случае, когда все отсчёты $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ принимаемого колебания статистически независимы и, следовательно, совместная плотность вероятности отсчётов $w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda)$ равна произведению одномерных плотностей вероятности:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= w(\vec{y} | \lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda) = \\ &= w(y_1 | \lambda) w(y_2 | \lambda) \dots w(y_N | \lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda). \end{aligned}$$

Далее мы будем рассматривать именно этот случай.

Как уже было сказано, апостериорная плотность вероятности даёт наиболее полную информацию об измеряемом параметре. Однако в практических задачах оптимального приёма обычно требуется получить не распределение вероятностей, а некоторое конкретное численное значение, которое будет являться оценкой параметра. Для его определения чаще всего используется *критерий максимума апостериорной вероятности*, в соответствии с которым оптимальная оценка параметра определяется как такое его значение, при котором апостериорная плотность вероятности максимальна:

$$\hat{\lambda} = \arg \max w_{ps}(\lambda).$$

Можно показать, что поскольку шум $n(t)$ имеет нормальное распределение вероятностей и является белым, то выражение для функции правдоподобия имеет следующий вид [1]:

$$L(\lambda) = const \cdot e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}},$$

где $q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt$ – корреляционный интеграл; $E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t) dt$ – энергия сигнала; G_0 – спектральная плотность шума; T – длительность принимаемого колебания; $const$ – некоторая константа.

Рассмотрим методику получения выражения для функции правдоподобия параметра сигнала, принимаемого в смеси с нормальным белым шумом. Эта задача решается в два этапа.

1) Сначала функция правдоподобия $L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda)$ вычисляется для случая, когда для обработки используются дискретные отсчёты $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ смеси сигнала и шума; при этом считается, что спектральная плотность шума постоянна в интервале частот от 0 до некоторой верхней граничной частоты f_B , которая больше, чем максимальная частота спектра сигнала. Частота взятия отсчётов (частота дискретизации) принимается равной минимальному значению, определяемому теоремой Котельникова, т.е. $f_d = 2f_B$.

2) Затем в полученном выражении выполняется переход к пределу: верхняя граничная частота спектра шума бесконечно увеличивается, что соответствует белому шуму, частота дискретизации и количество отсчётов также бесконечно увеличиваются ($f_d \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$), а интервал дискретизации стремится к нулю ($\Delta t_d = 1/f_d \rightarrow 0$). В результате получается выражение для функции правдоподобия $L(\lambda) = w(y(t) | \lambda)$ в случае обработки непрерывной реализации принимаемого колебания $y(t)$.

Получим в соответствии с этой методикой аналитические выражения, определяющие функцию правдоподобия.

*Функция правдоподобия параметра при обработке N отсчётов
принимаемого колебания*

Поскольку в соответствии с теоремой Котельникова частота дискретизации задаётся как $f_d = 2f_B$, то отсчёты шума в принимаемом колебании, взятые через интервал времени $\Delta t_d = 1/f_d$ будут взаимно независимыми случайными величинами. Для того чтобы показать это, рассмотрим АКФ шума, имеющего прямоугольный энергетический спектр, ограниченный частотой f_B (рис. 3.1):

$$K(\tau) = \int_0^\infty G(f) \cos 2\pi f \tau df = G_0 \int_0^{f_B} \cos 2\pi f \tau df = \\ = G_0 f_B \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau} = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau},$$

где G_0 – спектральная плотность шума; $\sigma^2 = G_0 f_B$ – дисперсия шума.

График АКФ шума показан на рис. 3.2. Значения переменной τ , при которых АКФ равна 0, определяются условием

$$2\pi f_B \tau_k = k\pi, \quad k=1,2,\dots,$$

из которого следует, что $\tau_k = \frac{k}{2f_B} = k\Delta t_d$. Следовательно, если отсчёты шума

брать с интервалом $\Delta t_d = 1/f_d$, то они будут взаимно некоррелированными. А поскольку они имеют нормальное распределение вероятностей, то они будут и статистически независимыми. Следовательно, отсчёты принимаемого колебания $y_i = y((i-1)\Delta t_d)$, $i=1,2,\dots,N$ также будут статистически независимыми. Поэтому функция правдоподобия, которая является совместной (т.е. многомерной) плотностью вероятности отсчётов y_1, y_2, \dots, y_N , может быть представлена в виде произведения одномерных плотностей вероятности отдельных отсчётов:

$$L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda) = w(y_1 | \lambda) w(y_2 | \lambda) \dots w(y_N | \lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda).$$

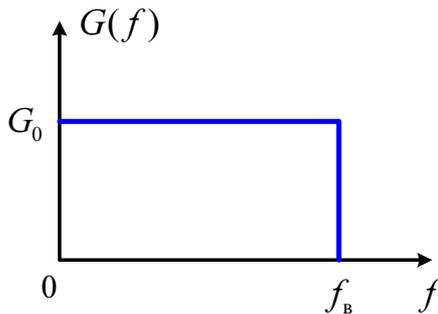


Рис. 3.1. Энергетический спектр шума с граничной частотой f_B

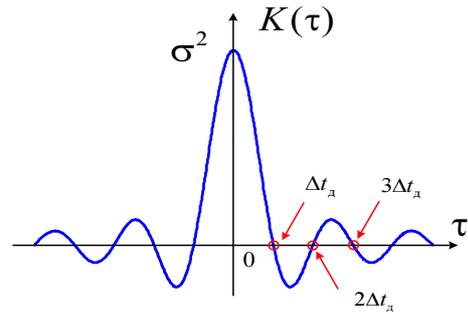


Рис. 3.2. Автокорреляционная функция шума с граничной частотой f_B

Каждый отсчёт имеет нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием $s_{\lambda_i} = s_{\lambda}((i-1)\Delta t_d)$ и дисперсией σ^2 :

$$w(y_i | \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda_i})^2}{2\sigma^2}}.$$

Следовательно, функция правдоподобия параметра λ определяется выражением

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda_i})^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda_i})^2 \right).$$

Поскольку дисперсия шума равна $\sigma^2 = G_0 f_B$, а частота дискретизации связана с верхней граничной частотой спектра шума соотношением $f_d = 2f_B$, то данное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$L(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2G_0 f_B} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \right) = \left\{ \text{т.к. } \frac{1}{2f_B} = \Delta t_d \right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_d \right).$$

На этом заканчивается вывод выражения для функции правдоподобия параметра λ в случае приёма сигнала на фоне шума с ограниченным по частоте энергетическим спектром, при обработке дискретных отсчётов принятого колебания.

Множитель $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N$ не зависит от измеряемого параметра и принятого колебания и поэтому не влияет на результат оценки параметра по критерию максимума апостериорной вероятности.

Функция правдоподобия параметра при обработке непрерывной реализации принимаемого колебания

Для определения функции правдоподобия при приёме сигнала на фоне белого шума выполним предельный переход, бесконечно увеличивая граничную частоту спектра шума: $f_B \rightarrow \infty$. В этом случае $\Delta t_d \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Тогда

$$L(\lambda) = \lim_{f_B \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_d \right) \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{f_B \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \cdot \lim_{\Delta t_d \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_d \right) =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{неопре-} \\ \text{делённость}}}{0^\infty} \cdot \exp \left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{от } \lambda \text{ не} \\ \text{зависит}}}{c_2} \exp \left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt \right).$$

Обозначим аргумент экспоненциальной функции в этом выражении как

$$k(\lambda) = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt$$

и преобразуем его следующим образом:

$$k(\lambda) = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y^2(t) - 2y(t)s_\lambda(t) + s_\lambda(t)^2] dt =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{G_0} \int_0^T y^2(t) dt}_{\text{от } \lambda \text{ не зависит}} + \underbrace{\frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_\lambda(t) dt}_{\text{корреляционный интеграл}} - \underbrace{\frac{1}{G_0} \int_0^T s_\lambda(t)^2 dt}_{\text{энергия сигнала}} = c_3 + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0}.$$

Следовательно, функция правдоподобия определяется выражением

$$L(\lambda) = c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}},$$

где $q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt$ – корреляционный интеграл; $E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t) dt$ – энергия сигнала, которая в общем случае зависит от измеряемого параметра.

Апостериорная плотность вероятности параметра равна

$$w_{ps}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda) = C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} w_{pr}(\lambda).$$

Критерий максимума апостериорной вероятности не требует знания абсолютных значений плотности вероятности – нужно знать лишь положение её максимума. Поэтому над апостериорной плотностью вероятности можно выполнять любые преобразования, которые не меняют положения её максимума. В случае приёма сигнала на фоне нормального белого шума структура выражения для апостериорной плотности вероятности такова, что значительно удобнее вычислять не саму плотность вероятности, а её логарифм. Тогда оптимальной оценкой параметра будет такое его значение, при котором достигается максимум логарифма апостериорной плотности вероятности:

$$\hat{\lambda} = \arg \max w_{ps}(\lambda) = \arg \max \ln w_{ps}(\lambda).$$

Здесь

$$\ln w_{ps}(\lambda) = \ln C + \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt - \frac{1}{G_0} \int_0^T s_\lambda^2(t) dt + \ln w_{pr}(\lambda).$$

Постоянное (не зависящее от параметра λ) слагаемое $\ln C$ не влияет на положение максимума функции $\ln w_{ps}(\lambda)$. Поэтому далее считаем его равным 0. Структурная схема оптимального приёмника, соответствующая полученному выражению, показана на рис. 3.3. Приёмник состоит из M идентичных каналов, каждый из которых содержит:

- источник опорного колебания $s_{\lambda_m}(t)$;
- перемножитель и интегратор, образующие коррелятор;
- источник смещения $\ln w_{pr}(\lambda_m) - \frac{E_c(\lambda_m)}{G_0}$;
- сумматор.

С помощью сумматора в выходное напряжение коррелятора вводится дополнительное смещение, зависящее от значения априорной плотно-

сти вероятности $w_{pr}(\lambda_m)$ и отношения энергии сигнала к спектральной плотности шума $\frac{E_c(\lambda_m)}{G_0}$.

Напряжения, соответствующие значениям логарифма апостериорной плотности вероятности $\ln w_{ps}(\lambda_m)$, сравниваются в устройстве выбора, которое определяет номер канала с максимальным значением напряжения:

$$\hat{m} = \operatorname{argmax}_{m=1, \overline{M}} \ln w_{ps}(\lambda_m).$$

Далее по номеру этого канала определяется значение измеряемого параметра, которое и берётся в качестве его оценки:

$$\hat{\lambda} = \lambda_{\hat{m}}.$$

При решении практических задач оптимального приёма обычно нет никакой априорной информации об измеряемом параметре, кроме его минимального λ_{\min} и максимального λ_{\max} значений.

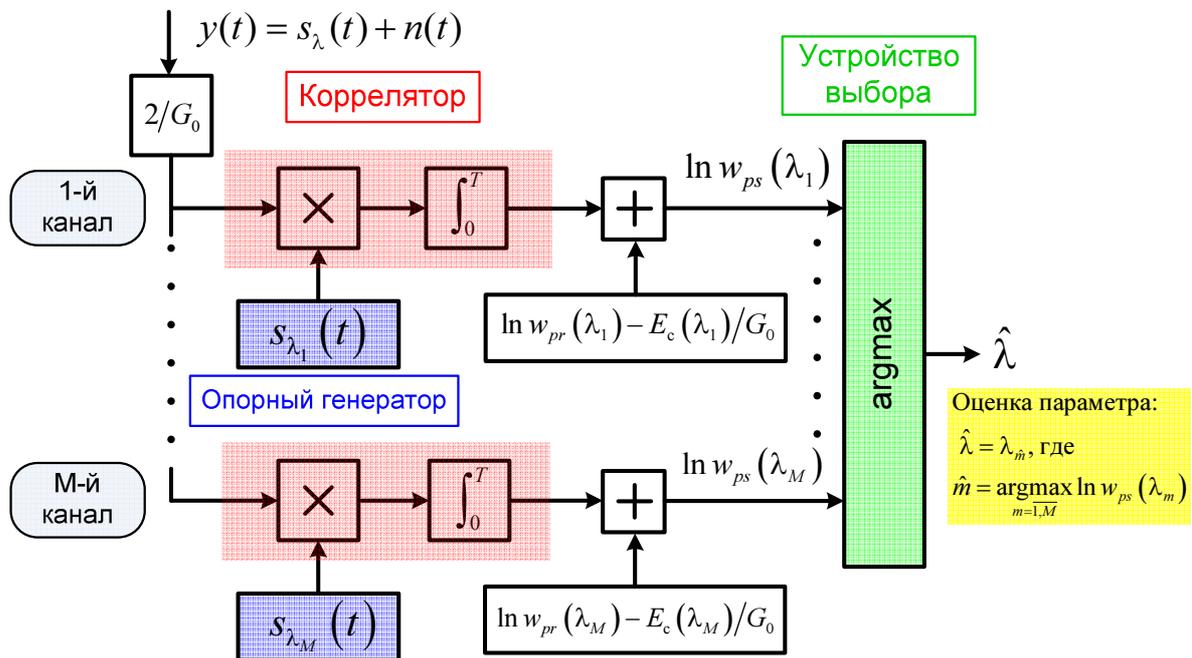


Рис. 3.3. Корреляционный приёмник

В этом случае принимают, что априорное распределение вероятностей измеряемого параметра равномерное в интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Тогда в этом интервале $w_{pr}(\lambda) = const$ и при оценивании параметра λ слагаемое $\ln w_{pr}(\lambda)$ можно не учитывать:

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} \left[\frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt - \frac{1}{G_0} \int_0^T s_\lambda^2(t) dt \right].$$

(Обратите внимание, что теперь поиск максимума производится только в интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$). Общий множитель $\frac{1}{G_0}$ можно вынести за скобки и также в дальнейшем не учитывать. Тогда получим

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} \left[2 \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt - \int_0^T s_\lambda^2(t) dt \right].$$

В этом выражении $\int_0^T s_\lambda^2(t) dt = E_c(\lambda)$ – энергия сигнала, которая в общем случае зависит от измеряемого параметра. Обозначим

$$\int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt = R(\lambda).$$

Тогда окончательно

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} [2R(\lambda) - E_c(\lambda)].$$

Оптимальный корреляционный приёмник

Корреляционный приёмник импульсного сигнала

Рассмотрим структуру и характеристики оптимального приёмника, предназначенного для измерения времени прихода прямоугольного видеоимпульса длительностью $\tau_{\text{и}}$. В этом случае измеряемый параметр $\lambda = \tau$, и зависимость сигнала от параметра выражается следующим образом:

$$s_\lambda(t) = s(t - \tau).$$

Примем, что время прихода импульса (задержка относительно момента времени $t = 0$) имеет равномерное априорное распределение вероятностей в интервале $[0, \tau_{\text{max}}]$:

$$w_{pr}(\tau) = \frac{1}{\tau_{\text{max}}}, \quad \tau \in [0, \tau_{\text{max}}].$$

Поскольку максимальная задержка сигнала равна τ_{\max} , то длительность принимаемой смеси сигнала и шума считаем равной $T = \tau_{\max} + \tau_{\text{и}}$, т.к. это колебание имеет смысл обрабатывать только на том интервале времени, где может быть полезный сигнал.

Ранее было получено общее выражение для логарифма апостериорной плотности вероятности измеряемого параметра $w_{ps}(\lambda)$ в случае приёма сигнала в смеси с нормальным белым шумом:

$$\ln w_{ps}(\lambda) = \ln C + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0} + \ln w_{pr}(\lambda),$$

где $w_{pr}(\lambda)$ – априорная плотность вероятности параметра;

G_0 – спектральная плотность белого шума;

$q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_\lambda(t)dt$ – корреляционный интеграл;

$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t)dt$ – энергия сигнала.

В случае измерения задержки это выражение упрощается благодаря тому, что:

- 1) энергия сигнала не зависит от измеряемого параметра, т.е. задержка является *неэнергетическим параметром*: $E_c(\tau) = const$;
- 2) априорное распределение вероятностей задержки – равномерное, т.е. плотность вероятности постоянна на интервале возможных значений параметра: $w_{pr}(\tau) = const, \tau \in [0, \tau_{\max}]$.

Следовательно, в этом случае выражение для логарифма апостериорной плотности вероятности задержки имеет следующий вид:

$$\ln w_{ps}(\tau) = C' + q(\tau) = C' + \frac{2}{G_0} R(\tau),$$

где C' – некоторая константа; $R(\tau) = \int_0^T y(t)s(t-\tau)dt$ – напряжение на выходе коррелятора.

Постоянное слагаемое C' влияет только на положение графика зависимости $\ln w_{ps}(\tau)$ по вертикали, а множитель $\frac{2}{G_0}$ – только на его масштаб. Значение аргумента, соответствующее максимуму логарифма апостериорной плотности вероятности, от них не зависит:

$$\hat{\tau} = \operatorname{argmax}_{\tau \in [0, \tau_{\max}]} \ln w_{ps}(\tau) = \operatorname{argmax}_{\tau \in [0, \tau_{\max}]} R(\tau).$$

Поэтому для нахождения оптимальной оценки задержки достаточно определить $R(\tau) = \int_0^T y(t)s(t-\tau)dt$ при различных значениях переменной τ .

В многоканальном корреляционном приёмнике параметр τ изменяется дискретно: $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$. Поэтому для нахождения оценки задержки доступны только отдельные значения функции $R(\tau)$: $R(\tau_1), R(\tau_2), \dots, R(\tau_M)$. В соответствии с используемым критерием максимума апостериорной вероятности оптимальный приёмник должен среди этих значений найти максимальное и определить номер того канала, в котором это максимальное значение достигается:

$$\hat{m} = \operatorname{argmax}_{m=1, M} R(\tau_m).$$

По номеру этого канала определяется соответствующее значение задержки: $\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$.

Структурная схема оптимального приёмника, построенного в соответствии с данным алгоритмом, изображена на рис. 3.4.

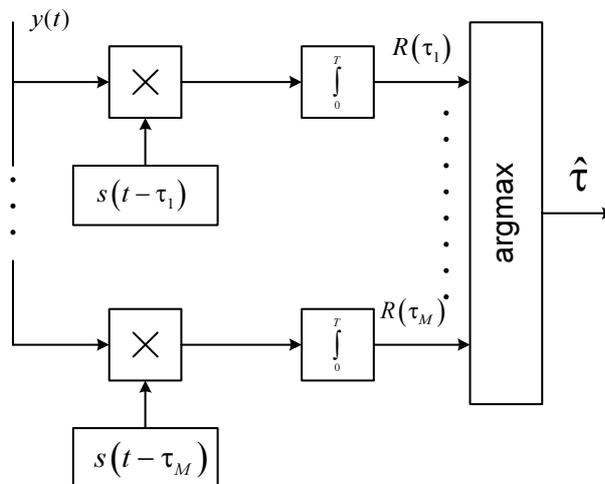


Рис. 3.4. Корреляционный приёмник для измерения задержки импульсного сигнала

В случае прямоугольного импульса операция умножения на опорное колебание в каждом канале сводится к стробированию принятого колебания стробом, имеющим длительность $\tau_{и}$ и задержку τ_{m} . Эпюры напряжений в каналах приёмника, поясняющие его работу, показаны на рис. 3.5. На верхнем графике показана реализация принятого колебания. Она представляет собой смесь прямоугольного импульса, который имеет задержку τ_0 (это истинное значение задержки сигнала), и белого шума. На рисунке шум показан условно, поскольку белый шум, как известно, имеет бесконечно большую дисперсию и такой процесс нельзя изобразить графически. Видно, что сигнал значительно искажается шумом.

На следующем рисунке показан процесс, который образуется на выходе перемножителя 1-го канала. В 1-м канале задержка опорного колебания равна 0. В результате умножения принятой реализации на опорное колебание (т.е. в результате стробирования) выделяется та часть принятого колебания, которая содержит только шум. Однако, поскольку заранее это неизвестно, то дальнейшая обработка принятой реализации в этом канале производится точно так же, как и в каналах, содержащих полезный сигнал. После стробирования случайное напряжение подаётся на интегратор. Интегрирование выполняется в течение длительности принятой реализации T , однако изменение напряжения на выходе интегратора будет происходить только на том интервале, который соответствует опорному колебанию (стробирующему импульсу). К моменту окончания стробирующего импульса на выходе интегратора образуется некоторое случайное напряжение, которое дальше не меняется. В результате на выходе 1-го канала получается напряжение, которое соответствует значению $R(\tau_1)$.

Далее пропустим несколько каналов и рассмотрим процессы в канале с номером $m - 1$, в котором задержка опорного колебания такая, что в принятой реализации часть сигнала попадает в стробирующий импульс. В результате после стробирования получается процесс, где сначала действует только шум, а затем – смесь сигнала и шума. При подаче этого процесса на интегратор напряжение на его выходе формируется следующим образом. До начала стробирующего импульса напряжение равно 0. Потом под действием шума оно случайным образом изменяется и далее, когда начинает действовать сигнал, возрастает. Регулярная составляющая этого возрастания связана с сигналом, а случайные отклонения напряжения обусловлены шумом. Дальше, после окончания строби-

рующего импульса, напряжение на выходе интегратора остаётся постоянным и определяет значение $R(\tau_{m-1})$.

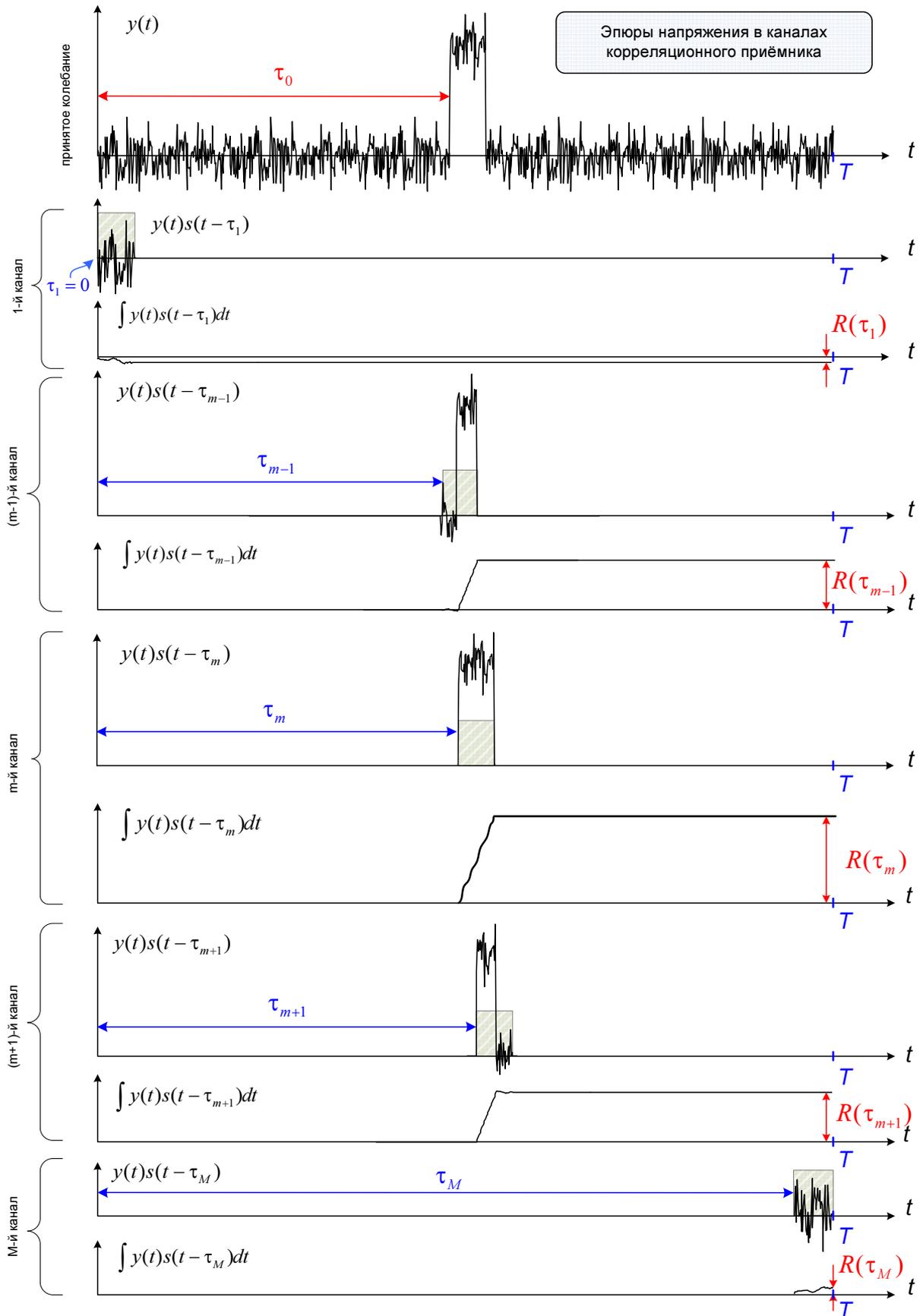


Рис. 3.5. Эюры напряжений в каналах корреляционного приёмника

Теперь рассмотрим процессы в канале с номером m . В этом канале временное положение опорного сигнала, т.е. стробирующего импульса, совпадает с истинным значением задержки принимаемого сигнала и, следовательно, сигнал полностью попадает в стробирующий импульс. В этом случае на входе интегратора действует только смесь сигнала и шума, поэтому напряжение на выходе интегратора возрастает в течение всей длительности стробирующего импульса и оказывается больше, чем в предыдущем канале. Это напряжение определяет значение $R(\tau_m)$.

В следующем канале приёмника задержка стробирующего импульса больше τ_0 , и в этом случае на входе интегратора сначала действует смесь сигнала и шума, а затем – только шум. В результате напряжение на выходе интегратора сначала возрастает, затем под действием шума происходят случайные колебания, а далее, после окончания стробирующего импульса, это напряжение не меняется. Оно определяет значение $R(\tau_{m+1})$.

Теперь перейдём к последнему каналу, имеющему номер M . В этом канале в результате стробирования выделяется только шум и поэтому напряжение на выходе интегратора случайным образом меняется и концу интервала интегрирования имеет некоторое случайное значение $R(\tau_M)$.

В результате в приёмнике формируется следующий набор значений напряжения на выходе интегратора (рис. 3.6):

$$R(\tau_1), \dots, R(\tau_{m-1}), R(\tau_m), R(\tau_{m+1}), \dots, R(\tau_M).$$

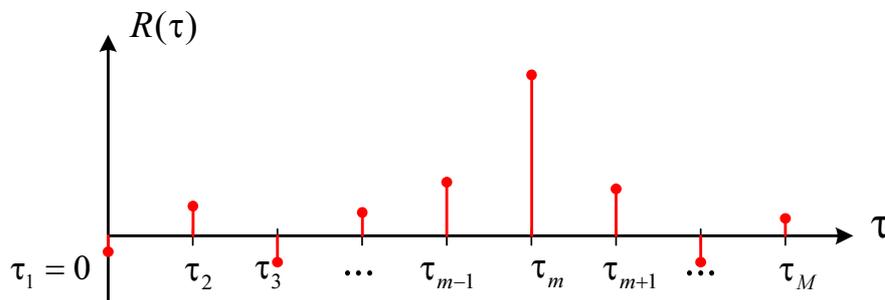


Рис. 3.6. Напряжение в каналах корреляционного приёмника

Далее в соответствии с алгоритмом оценивания задержки по критерию максимума апостериорной вероятности (который в данном случае совпадает с критерием максимума функции правдоподобия) с помощью устройства сравнения напряжений находится номер канала \hat{m} , на вы-

ходе которого будет максимальное напряжение, и по нему определяется значение задержки $\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$, соответствующее этому каналу. Это и будет оптимальная оценка задержки сигнала.

Рассмотренный пример показывает, что процедуру оценивания параметра сигнала по критерию максимума апостериорной вероятности можно заменить более простой процедурой оценивания по критерию максимума корреляционного интеграла, если выполняются следующие условия:

- 1) измеряемый параметр является неэнергетическим;
- 2) априорное распределение вероятностей параметра равномерно.

К числу неэнергетических параметров, кроме задержки, относятся следующие:

- начальная фаза сигнала (при условии, что длительность принятого колебания, которая определяет время интегрирования, много больше периода несущей сигнала: $T \gg T_0 = \frac{1}{f_0}$);
- частота сигнала (при условии, что соотношение $T \gg T_0 = \frac{1}{f_0}$ выполняется для минимальной частоты в интервале возможных значений $[f_{0\min}, f_{0\max}]$).

Структурная схема оптимального приёмника для этого случая изображена на рис. 3.7.

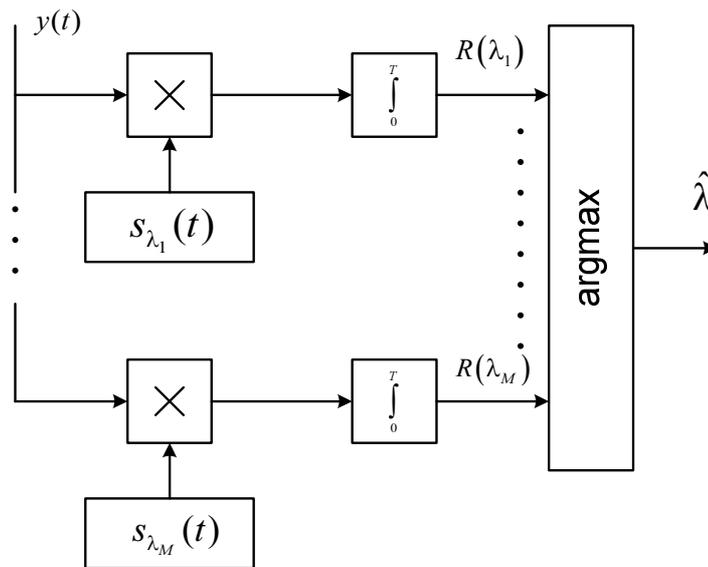


Рис. 3.7. Корреляционный приёмник для измерения неэнергетического параметра с равномерным априорным распределением вероятностей

Расчёт максимального отношения сигнал-шум на выходе коррелятора

На примере корреляционного приёмника, измеряющего время задержки импульса, видно, что для получения оценки неэнергетического параметра с равномерным априорным распределением достаточно найти значение параметра, соответствующего максимуму корреляционного интеграла

$$q(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s(t - \tau)dt.$$

(Здесь и далее для удобства математических выкладок рассматривается корреляционный интеграл $q(\tau)$, а не напряжение $R(\tau)$, которое отличается от него только постоянным множителем). Поскольку принятая смесь сигнала и шума равна

$$y(t) = s(t - \tau_0) + n(t),$$

где τ_0 – задержка сигнала, то корреляционный интеграл можно представить в виде суммы двух составляющих – регулярной сигнальной составляющей $q_c(\tau)$ и случайной шумовой составляющей $q_{ш}(\tau)$:

$$q(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0)s(t - \tau)dt + \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)s(t - \tau)dt = q_c(\tau) + q_{ш}(\tau).$$

Составляющую $q_c(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0)s(t - \tau)dt$ называют *сигнальной*

функцией, а составляющую $q_{ш}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)s(t - \tau)dt$ – *шумовой функцией* [1].

Точность измерения задержки сигнала по положению максимума корреляционного интеграла будет тем выше, чем больше максимальный уровень регулярной составляющей по сравнению с уровнем случайной составляющей. Будем характеризовать уровень случайной составляющей величиной среднеквадратического отклонения (СКО) шумовой функции и найдём максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора:

$$\rho_{\max} = \frac{q_{c \max}}{\sigma_{q_{ш}}}.$$

Для этого прежде всего определим, при каком значении параметра сигнальная функция имеет максимум.

Вычисление $q_{c \max}$

Максимум сигнальной функции $q_c(\tau)$ достигается при $\tau = \tau_0$. Это следует из того, что в пространстве функций интеграл $\int_0^T s(t - \tau_0)s(t - \tau)dt$ можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: вектора \vec{s}_{τ_0} , соответствующего сигналу $s(t - \tau_0)$, и вектора \vec{s}_{τ} , соответствующего сигналу $s(t - \tau)$:

$$\int_0^T s(t - \tau_0)s(t - \tau)dt = (\vec{s}_{\tau_0}, \vec{s}_{\tau}).$$

Длина (норма) этих векторов одинакова, поскольку в функциональном пространстве норма вектора определяется как

$$\|\vec{s}_{\tau}\| = \sqrt{(\vec{s}_{\tau}, \vec{s}_{\tau})} = \sqrt{\int_0^T s^2(t - \tau)dt} = \sqrt{E_c},$$

а энергия сигнала от задержки не зависит. Известно, что скалярное произведение двух векторов одинаковой длины максимально в том случае, когда они совпадают:

$$(\vec{s}_{\tau_0}, \vec{s}_{\tau}) = \max \text{ при } \vec{s}_{\tau} = \vec{s}_{\tau_0}.$$

В математическом анализе этот результат известен как неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\left| \int_0^T f_1(t)f_2(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^T f_1^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_0^T f_2^2(t)dt},$$

причём равенство будет при $f_2(t) = cf_1(t)$, где c – произвольная константа.

Таким образом, максимум сигнальной функции достигается при $\tau = \tau_0$ и равен

$$q_{c \max} = q_c(\tau_0) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0)^2 dt = \frac{2E_c}{G_0}.$$

Вычисление σ_{q_m}

Для определения СКО шумовой функции сначала найдём её дисперсию $\sigma_{q_m}^2$, равную квадрату СКО. Поскольку математическое ожидание (среднее значение) шума равно 0, то случайная шумовая функция также имеет нулевое математическое ожидание:

$$\overline{q_m(\tau)} = \frac{2}{G_0} \int_0^T \overline{n(t)} s(t - \tau) dt = 0.$$

Следовательно, дисперсия шумовой функции определяется как

$$\sigma_{q_m}^2 = \overline{q_m^2(\tau)} = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t_1) s(t_1 - \tau) dt_1 \cdot \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t_2) s(t_2 - \tau) dt_2.$$

(Здесь t_1 и t_2 – переменные интегрирования, которые используются вместо t для того, чтобы далее можно было заменить произведение двух интегралов одним двойным интегралом).

Поскольку произведение двух интегралов можно заменить двойным интегралом и линейные операции интегрирования и статистического усреднения можно поменять местами, то

$$\sigma_{q_m}^2 = \left(\frac{2}{G_0} \right)^2 \int_0^T \int_0^T \overline{n(t_1) n(t_2) s(t_1 - \tau) s(t_2 - \tau)} dt_1 dt_2.$$

Выражение $\overline{n(t_1) n(t_2)}$ представляет собой автокорреляционную функцию шума $K_n(x) = K_n(t_2 - t_1)$. (Здесь аргумент АКФ обозначен как x , поскольку обычно используемая переменная τ уже занята).

Найдём АКФ шума, используя теорему Винера-Хинчина, которая связывает АКФ стационарного случайного процесса с его «математическим» энергетическим спектром. Поскольку шум белый и его односторонняя («физическая») спектральная плотность равна G_0 , то уровень двустороннего «математического» спектра в 2 раза меньше:

$$G_{n \text{ м}}(\omega) = \frac{G_0}{2}.$$

По теореме Винера-Хинчина АКФ равна обратному преобразованию Фурье двустороннего «математического» спектра:

$$K_n(x) = \mathcal{F}^{-1} \{G_{n_m}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0}{2} e^{j\omega x} d\omega = \frac{G_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega.$$

Известно, что $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} d\omega = \delta(x)$. Следовательно, $K_n(x) = \frac{G_0}{2} \delta(x)$.

Таким образом, мы получили ожидаемый результат: автокорреляционная функция белого шума имеет вид δ -функции. Теперь подставим выражение для АКФ в формулу, определяющую дисперсию шумовой функции:

$$\begin{aligned} \sigma_{q_m}^2 &= \left(\frac{2}{G_0}\right)^2 \int_0^T \int_0^T \frac{G_0}{2} \delta(t_2 - t_1) s(t_1 - \tau) s(t_2 - \tau) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t_1 - \tau) \left[\int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_2 - \tau) dt_2 \right] dt_1. \end{aligned}$$

В соответствии с «фильтрующим» свойством δ -функции интеграл, стоящий в квадратных скобках, равен

$$\int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_2 - \tau) dt_2 = s(t_1 - \tau).$$

Следовательно, $\sigma_{q_m}^2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t_1 - \tau)^2 dt_1 = \frac{2E_c}{G_0}$. (Видно, что для дисперсии шумовой функции мы получили такое же выражение, как и для максимального значения сигнальной функции. Это оказалось возможным благодаря тому, что в выражение для корреляционного интеграла $q(\tau)$ входит коэффициент $\frac{2}{G_0}$).

Таким образом, СКО шумовой функции равно $\sigma_{q_m} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}$ и, следовательно, максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора определяется выражением

$$\rho_{\max} = \frac{q_{c \max}}{\sigma_{q_m}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}.$$

Видно, что это отношение *не зависит от формы сигнала* и определяется лишь его энергией.

Можно показать [1], что при $\rho_{\max} \gg 1$ СКО оптимальной оценки времени прихода импульсного сигнала, которое характеризует точность измерения этого параметра в корреляционном приёмнике, равно

$$\sigma_{\hat{\tau}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{СК}} \rho_{\max}},$$

где $\Delta\omega_{\text{СК}}$ – среднеквадратическая ширина спектра сигнала, которая определяется как

$$\Delta\omega_{\text{СК}} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S^2(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega}},$$

где $S(\omega)$ – амплитудный спектр сигнала; ω_0 – его центральная частота.

Поскольку $\sigma_{\hat{\tau}}$ обратно пропорционально ширине спектра сигнала, то для повышения точности измерения задержки применяют широкополосные сигналы с внутриимпульсной модуляцией, к которым относятся, в частности, сигналы с линейной частотной модуляцией и с фазовой манипуляцией.

3.2. Оптимальное обнаружение сигнала

С точки зрения теории оптимального приёма задача обнаружения сигнала, принимаемого в смеси с шумом, представляет собой частный случай задачи оценивания параметра. Действительно, принятую реализацию смеси сигнала и шума можно записать в следующем виде:

$$y(t) = \lambda s(t) + n(t) = s_{\lambda}(t) + n(t),$$

где $s_{\lambda}(t) = \lambda s(t)$, $\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если сигнал есть} \\ 0, & \text{если сигнала нет} \end{cases}$.

Следовательно, задача обнаружения сигнала сводится к оценке параметра λ , который может принимать значение 0 или 1. Поскольку в этом случае оцениваемый параметр λ является дискретной случайной величиной, то при записи алгоритма оптимального обнаружения будем

пользоваться не функциями плотности вероятности, а значениями вероятностей. Наиболее просто задача обнаружения сигнала решается тогда, когда сигнал полностью известен. Рассмотрим алгоритм оптимального обнаружения в этом случае.

Оптимальный обнаружитель полностью известного сигнала

Апостериорная вероятность параметра λ равна

$$p_{ps}(\lambda) = C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda),$$

где $q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt$ – корреляционный интеграл;

$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t) dt$ – энергия сигнала.

Найдём апостериорную вероятность для каждого из двух возможных значений параметра λ .

А) $\lambda = 1$ (сигнал есть)

В этом случае $s_\lambda(t) = \lambda s(t) = s(t)$, следовательно, энергия сигнала

$E_c(1) = \int_0^T s^2(t) dt = E_c$. Корреляционный интеграл равен

$$q(1) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s(t) dt.$$

Для краткости обозначим его просто q . Тогда для апостериорной вероятности получаем выражение

$$p_{ps}(1) = C e^q e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1).$$

Б) $\lambda = 0$ (сигнал отсутствует).

В этом случае $s_\lambda(t) = \lambda s(t) = 0$, следовательно, $E_c(0) = 0$, $q(0) = 0$ и апостериорная вероятность равна

$$p_{ps}(0) = C p_{pr}(0).$$

В соответствии с критерием максимума апостериорной вероятности оценка параметра λ находится следующим образом:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{(т.е. принимается решение о наличии сигнала), если } p_{ps}(1) > p_{ps}(0) \\ 0 & \text{(т.е. принимается решение об отсутствии сигнала), если } p_{ps}(1) < p_{ps}(0) \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство для апостериорных вероятностей в первом случае, т.е. когда $p_{ps}(1) > p_{ps}(0)$:

$$p_{ps}(1) = C e^q e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1) > C p_{pr}(0) = p_{ps}(0).$$

Сокращая константу C и перенося сомножители $e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1)$ из левой части неравенства в правую, получим:

$$e^q > \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} e^{\frac{E_c}{G_0}}.$$

Логарифмируя это неравенство, получим условие, при котором принимается решение о наличии сигнала, в следующем виде:

$$q > \ln \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} + \frac{E_c}{G_0}.$$

Обозначим априорную вероятность наличия сигнала как p_{pr} . Тогда априорная вероятность отсутствия сигнала равна $p_{pr}(0) = 1 - p_{pr}$. Таким образом, получаем следующий алгоритм оптимального обнаружения сигнала:

$$\frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s(t)dt > \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \frac{E_c}{G_0}.$$

Выражение в правой части неравенства определяет порог, с которым сравнивается значение корреляционного интеграла:

$$h = \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \frac{E_c}{G_0}.$$

Структурная схема обнаружителя, построенного в соответствии с полученным алгоритмом, показана на рис. 3.8. Здесь ПУ – пороговое устройство (в случае аналоговой обработки сигналов в качестве порогового устройства используется компаратор, сравнивающий напряжение на выходе коррелятора q с напряжением, определяющим порог h).

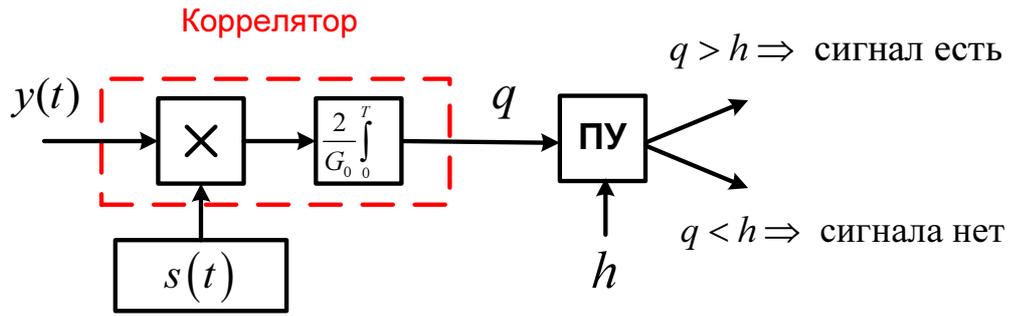


Рис. 3.8. Структурная схема оптимального обнаружителя

Характеристики оптимального обнаружителя

При обнаружении сигнала возможны следующие ситуации:

λ / $\hat{\lambda}$	1	0
1	<p>правильное обнаружение (с вероятностью $p_{обн}$)</p>	<p>ложное срабатывание [ложная тревога (ЛТ)] (с вероятностью $p_{ЛТ}$)</p>
0	<p>пропуск сигнала (с вероятностью $p_{проп}$)</p>	<p>правильное необнаружение (с вероятностью $p_{необн}$)</p>

Поскольку сигнал принимается в смеси со случайным шумом, то каждая из этих ситуаций – случайное событие. При этом $p_{проп} + p_{обн} = 1$ и $p_{необн} + p_{ЛТ} = 1$, следовательно, из четырёх вероятностей только две являются независимыми. Обычно качество работы обнаружителя характеризуют вероятностью правильного обнаружения $p_{обн}$ (по традиции в литературе её часто обозначают буквой D – от слова *Detection* – «обнаружение») и вероятностью ложной тревоги $p_{ЛТ}$ (которую обозначают буквой F – от словосочетания *False Alarm* – «ложная тревога»). Для того чтобы найти эти вероятности, рассмотрим статистические характеристики корреляционного интеграла, определяющего напряжение на входе порогового устройства (ПУ).

Корреляционный интеграл определяется выражением

$$q = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s(t)dt = \frac{2}{G_0} \int_0^T [\lambda s(t) + n(t)]s(t)dt =$$

$$= \lambda \frac{2}{G_0} \int_0^T s^2(t)dt + \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)s(t)dt = \lambda \frac{2E_c}{G_0} + q_{ш}.$$

Поскольку шум $n(t)$ имеет нормальное распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием, то и шумовая функция

$q_{ш} = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)s(t)dt$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$\bar{q}_{ш} = 0, \quad \mathbf{D}\{q_{ш}\} = \frac{2E_c}{G_0}.$$

Следовательно, корреляционный интеграл также имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами

$$\bar{q} = \lambda \frac{2E_c}{G_0}, \quad \mathbf{D}\{q\} = \sigma_q^2 = \frac{2E_c}{G_0}.$$

Плотность вероятности распределения зависит от значения параметра λ . Далее будем рассматривать две условные плотности вероятности:

$$w(q | \lambda = 1) = \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\bar{q} | \lambda = 1))^2}{2\sigma_q^2}} \quad \text{при } \lambda = 1,$$

$$w(q | \lambda = 0) = \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\bar{q} | \lambda = 0))^2}{2\sigma_q^2}} = \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_q^2}} \quad \text{при } \lambda = 0.$$

Здесь $(\bar{q} | \lambda = 1) = \frac{2E_c}{G_0}$. Графики этих функций показаны на рис. 3.9.

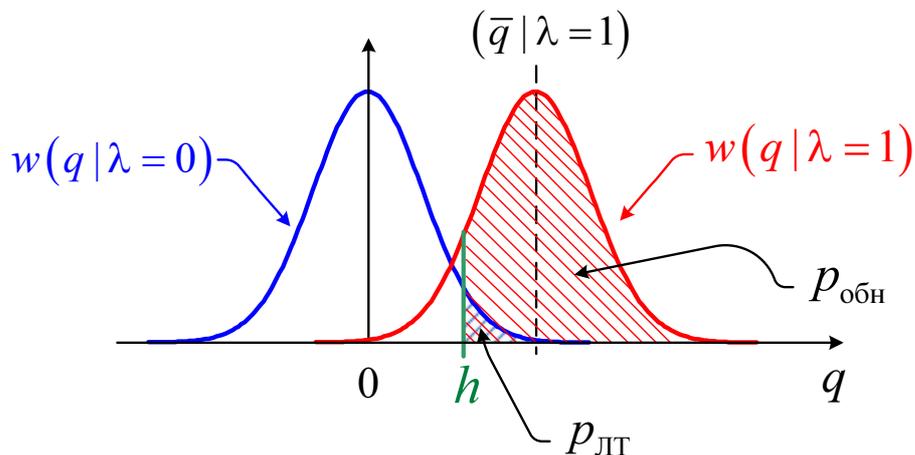


Рис. 3.9. Условные плотности вероятности корреляционного интеграла

Вероятность правильного обнаружения равна вероятности превышения порога h при условии, что сигнал есть, т.е. $\lambda = 1$:

$$p_{\text{обн}} = \mathbb{P}\{q > h | \lambda = 1\} = \int_h^{\infty} w(q | \lambda = 1) dq = 1 - \int_{-\infty}^h w(q | \lambda = 1) dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\bar{q} | \lambda = 1))^2}{2\sigma_q^2}} dq = 1 - \Phi\left(\frac{h - (\bar{q} | \lambda = 1)}{\sigma_q}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – интеграл вероятности (его график показан на рис. 3.10).

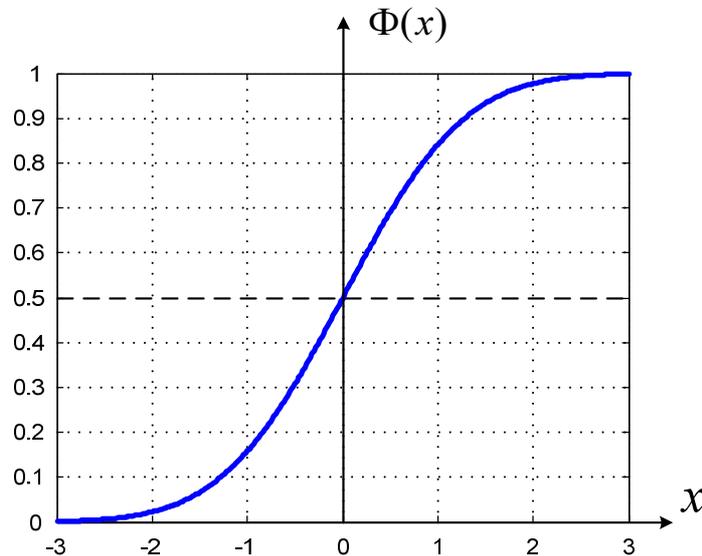


Рис. 3.10. Интеграл вероятности

Вероятность ложной тревоги определяется аналогичным выражением, но при условии, что сигнал отсутствует ($\lambda = 0$):

$$p_{\text{лт}} = \mathbb{P}\{q > h | \lambda = 0\} = \int_h^{\infty} w(q | \lambda = 0) dq = 1 - \int_{-\infty}^h w(q | \lambda = 0) dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_q^2}} dq = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right).$$

Полученные формулы позволяют рассчитать характеристики оптимального обнаружителя по известным значениям E_c , G_0 и h . Напомним, что для определения порога h нужно также знать априорную

вероятность наличия сигнала. Однако, часто, например в радиолокации, эта вероятность неизвестна. Тогда для оптимального обнаружения используют критерий Неймана-Пирсона, в соответствии с которым должна быть максимальна вероятность правильного обнаружения при заданной допустимой вероятности ложной тревоги.

Доказано [1, 2], что в этом случае оптимальный обнаружитель имеет такую же структуру, что и при синтезе по критерию максимума апостериорной вероятности, т.е. состоит из коррелятора и порогового устройства. Отличие состоит только в величине порога. Порог определяется по заданной допустимой вероятности ложной тревоги: поскольку

ку $p_{лт} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right)$, то $h = \sigma_q \Phi^{-1}(1 - p_{лт})$, где $\Phi^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная интегралу вероятности.

Используя это выражение, найдём вероятность правильного обнаружения по критерию Неймана-Пирсона:

$$p_{обн} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q} - \frac{(\bar{q} | \lambda = 1)}{\sigma_q}\right) = \Phi\left(\frac{(\bar{q} | \lambda = 1)}{\sigma_q} - \frac{h}{\sigma_q}\right).$$

Поскольку $(\bar{q} | \lambda = 1) = \frac{2E_c}{G_0}$ и $\sigma_q = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}$, а нормированный порог

$\frac{h}{\sigma_q} = \Phi^{-1}(1 - p_{лт})$, то

$$p_{обн} = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} - \Phi^{-1}(1 - p_{лт})\right).$$

Это выражение определяет **характеристику обнаружения** – график зависимости вероятности обнаружения от отношения сигнал-шум, определяемого как

$\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}$, при $p_{лт} = const$. Характеристика обнаружения имеет вид функции интеграла вероятности. Её график при типичных значениях вероятности ложной тревоги $p_{лт} = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ показан на рис. 3.11. (В технической литературе отношение сигнал-шум часто

выражают в децибелах: $20\lg\left(\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right) = 10\lg\left(\frac{2E_c}{G_0}\right)$).

Используя формулу для вероятности обнаружения, можно получить следующее простое выражение для определения требуемого отношения сигнал-шум:

$$\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} = \Phi^{-1}(p_{\text{обн}}) + \Phi^{-1}(1 - p_{\text{лт}}).$$

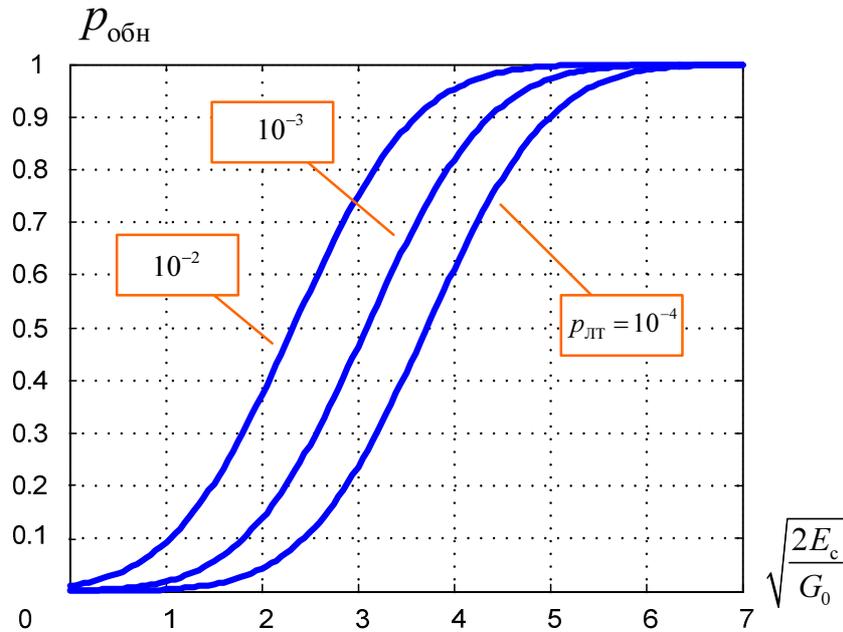


Рис. 3.11. Характеристики обнаружения полностью известного сигнала

Дополнительные сведения

Оптимальный обнаружитель сигнала с неизвестной начальной фазой

В этом случае, так же как и в задаче оценивания времени прихода радиопульса с неизвестной начальной фазой, производится усреднение апостериорной вероятности параметра λ по начальной фазе сигнала, которая считается случайной величиной:

$$p_{ps}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{ps}(\lambda | \varphi) w_{pr}(\varphi) d\varphi,$$

где $p_{ps}(\lambda | \varphi)$ – условная апостериорная вероятность, $w_{pr}(\varphi)$ – плотность вероятности начальной фазы. Считая, что фаза имеет равномерное распределение в интервале $[0, 2\pi]$, получим

$$p_{ps}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{ps}(\lambda | \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[C e^{q(\lambda, \varphi)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda) \right] d\varphi =$$

$$= C \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{q(\lambda, \varphi)} d\varphi \right] \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} \cdot p_{pr}(\lambda).$$

Здесь учтено, что энергия сигнала $E_c(\lambda)$ не зависит от его начальной фазы.

Сигнал со случайной начальной фазой имеет вид

$$s(t) = U_c(t) \cos(\omega_0 t + \psi_c(t) + \varphi).$$

Следовательно, корреляционный интеграл определяется выражением

$$q(\lambda, \varphi) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) \lambda s(t) dt = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) \lambda [U_c(t) \cos(\omega_0 t + \psi_c(t) + \varphi)] dt$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{q(\lambda, \varphi)} d\varphi = I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z(\lambda) \right),$$

где $Z(\lambda) = \sqrt{Z^c(\lambda)^2 + Z^s(\lambda)^2}$,

$$Z^c(\lambda) = \lambda \int_0^T y(t) U_c(t) \cos(\omega_0 t + \psi_c(t)) dt, \quad Z^s(\lambda) = \lambda \int_0^T y(t) U_c(t) \sin(\omega_0 t + \psi_c(t)) dt.$$

Найдём апостериорную вероятность при наличии и при отсутствии сигнала.

А) $\lambda = 1$ (сигнал есть)

$$p_{ps}(1) = C I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z(1) \right) e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1).$$

Б) $\lambda = 0$ (сигнал отсутствует).

В этом случае $E_c(0) = 0$, $Z(0) = 0$, $I_0(0) = 1$ и апостериорная вероятность равна

$$p_{ps}(0) = C p_{pr}(0).$$

Решение об обнаружении сигнала принимается в том случае, когда

$$p_{ps}(1) > p_{ps}(0).$$

Подставляя в это неравенство выражения для апостериорных вероятностей, получим:

$$C I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z(1) \right) e^{-\frac{E_c}{G_0} p_{pr}(1)} > C p_{pr}(0).$$

Обозначая $p_{pr}(1) = p_{pr}$ и учитывая, что $p_{pr}(0) = 1 - p_{pr}$, получим

$$I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z(1) \right) e^{-\frac{E_c}{G_0} p_{pr}} > 1 - p_{pr}$$

или, после логарифмирования,

$$\ln I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z(1) \right) > \underbrace{\frac{E_c}{G_0} + \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}}_h.$$

Порог, с которым производится сравнение, так же как и в случае обнаружения полностью известного сигнала, определяется выражением

$$h = \frac{E_c}{G_0} + \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}.$$

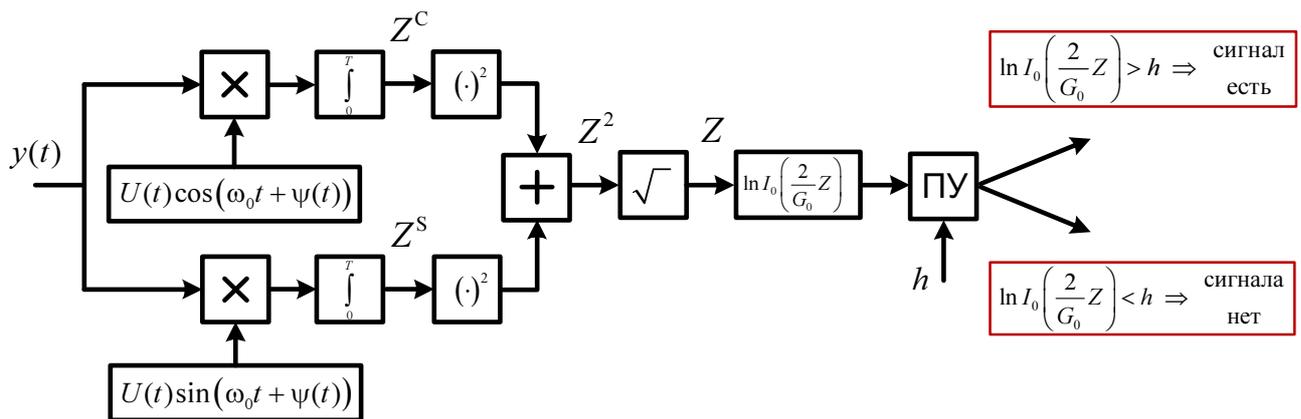


Рис. 3.12. Структурная схема оптимального обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой

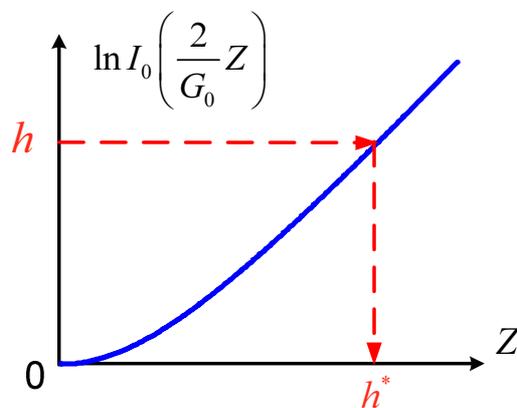


Рис. 3.13. График функции $\ln I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z \right)$

Структурная схема оптимального обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой показана на рис. 3.12. Для упрощения реализации обнаружителя можно исключить нелинейное преобразование $\ln I_0 \left(\frac{2}{G_0} Z \right)$, одновременно изменив

порог на $h^* = \left(\ln I_0 \left(\frac{2}{G_0} (\cdot) \right) \right)^{-1} (h)$ (см. рис. 3.13). Соответствующая структурная схема обнаружителя показана на рис. 3.14.

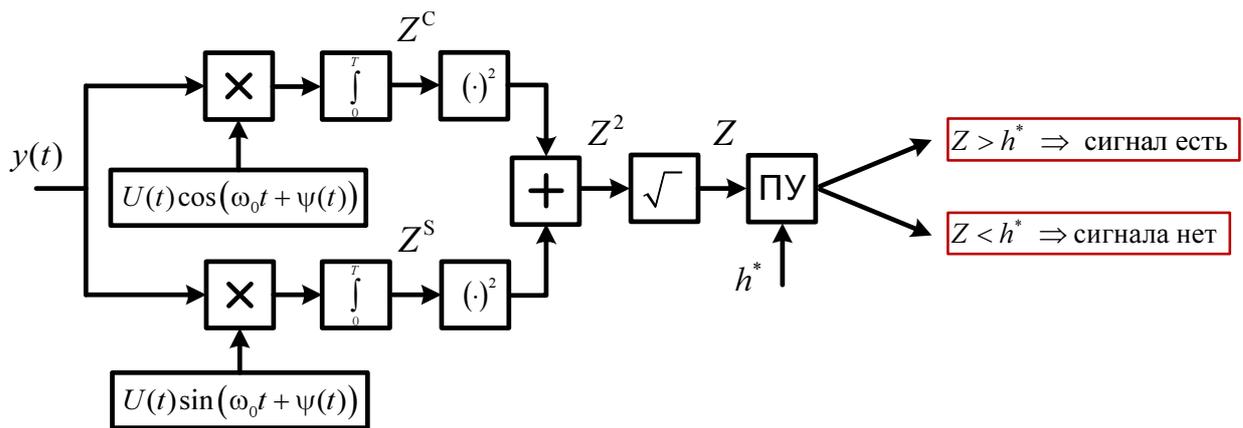


Рис. 3.14. Структурная схема оптимального обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой (с изменённым порогом)

Характеристики оптимального обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой

Найдём вероятность ложной тревоги и вероятность правильного обнаружения при некотором заданном значении порога h^* . По этим выражениям может быть получена характеристика обнаружения.

Расчёт характеристик обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой отличается от расчёта обнаружителя полностью известного сигнала следующим. Тракт обнаружителя полностью известного сигнала (до входа ПУ) – линейный, поэтому распределение вероятностей напряжения на входе ПУ как при отсутствии сигнала, так и при его наличии имеет один и тот же вид – это нормальное распределение. Тракт обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой – нелинейный, т.к. включает операции возведения в квадрат и извлечения квадратного корня. Поэтому распределение вероятностей напряжения на входе ПУ при наличии сигнала и при его отсутствии описывается различными законами.

Для того чтобы найти распределение вероятностей напряжения Z на входе ПУ, воспользуемся аналогией между выражением для Z и выражением для огибающей U смеси сигнала и шума:

$$Z = \sqrt{Z^{c2} + Z^{s2}},$$

$$U = \sqrt{U^{c2} + U^{s2}}.$$

В отсутствие сигнала огибающая имеет распределение Релея, поэтому и напряжение на входе ПУ имеет такое же распределение:

$$w(Z | \lambda = 0) = \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}}, Z \geq 0.$$

Здесь $\sigma^2 = \sqrt{\mathbf{D}\{Z^C\}} = \sqrt{\mathbf{D}\{Z^S\}}$ – дисперсия напряжения на выходе каждого коррелятора.

Ранее, при выводе выражения для максимального отношения сигнал-шум на выходе коррелятора, было показано, что дисперсия интеграла $\int_0^T n(t)s(t)dt$ не

зависит от вида сигнала и равна $\frac{G_0}{2} E_c$. Следовательно,

$\mathbf{D}\{Z^C\} = \mathbf{D}\{Z^S\} = \sigma^2 = \frac{G_0}{2} E_c$. Таким образом, определено значение параметра распределения Релея.

Найдём вероятность ложной тревоги:

$$P_{ЛТ} = \mathbb{P}\{Z > h^* | \lambda = 0\} = \int_{h^*}^{\infty} w(Z | \lambda = 0) dZ = \int_{h^*}^{\infty} \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}} dZ.$$

Для вычисления этого интеграла перейдём от переменной Z к переменной

$x = -\frac{Z^2}{2\sigma^2}$. Тогда $dx = d\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{Z}{\sigma^2} dZ$ и

$$P_{ЛТ} = - \int_{-\frac{h^{*2}}{2\sigma^2}}^{-\infty} e^x dx = -e^x \Big|_{-\frac{h^{*2}}{2\sigma^2}}^{-\infty} = e^{-\frac{h^{*2}}{2\sigma^2}}.$$

График зависимости вероятности ложной тревоги от напряжения порога h^* изображён на рис. 3.15.

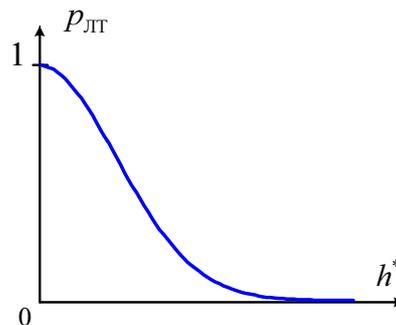


Рис. 3.15. Зависимость вероятности ложной тревоги от напряжения порога

При использовании в обнаружителе критерия Неймана-Пирсона по заданной допустимой вероятности ложной тревоги определяется порог:

$$\ln p_{\text{ЛТ}} = -\frac{h^*{}^2}{2\sigma^2} \Rightarrow h^* = \sigma\sqrt{-2\ln p_{\text{ЛТ}}}, \text{ где } \sigma = \sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}.$$

Теперь рассмотрим статистические характеристики напряжения на входе ПУ при наличии сигнала. По аналогии с распределением вероятностей огибающей смеси сигнала и шума напряжение Z на входе ПУ имеет распределение Райса:

$$w(Z | \lambda = 1) = \frac{Z}{\sigma^2} I_0\left(\frac{ZZ_c}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{Z^2+Z_c^2}{2\sigma^2}}, Z \geq 0.$$

Здесь Z_c – напряжение на входе ПУ при действии только сигнала, равное $Z_c = \sqrt{Z_c^{c2} + Z_c^{s2}}$, где Z_c^c, Z_c^s – напряжение на выходе коррелятора косинусного и синусного подканалов при действии сигнала, $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\{Z^c\}} = \sqrt{\mathbf{D}\{Z^s\}} = \sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}$ – СКО шума на выходе корреляторов.

Найдём Z_c^c и Z_c^s .

$$\begin{aligned} Z_c^c &= \int_0^T [U(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi)] [U(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))] dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T U^2(t) \cos(\varphi) dt}_{E_c \cos \varphi} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T U^2(t) \cos(2\omega_0 t + 2\psi(t) + \varphi) dt}_{\text{интеграл } \ll E_c \text{ при } T \gg \frac{1}{2f_0}} \approx E_c \cos \varphi. \end{aligned}$$

Далее для простоты будем считать это равенство точным. Аналогично,

$$Z_c^s = \int_0^T [U(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi)] [U(t) \sin(\omega_0 t + \psi(t))] dt \approx E_c \sin \varphi.$$

Следовательно, $Z_c = \sqrt{Z_c^{c2} + Z_c^{s2}} = \sqrt{(E_c \cos \varphi)^2 + (E_c \sin \varphi)^2} = E_c$.

Вероятность правильного обнаружения определяется выражением

$$p_{\text{обн}} = \mathbb{P}\{Z > h^* | \lambda = 1\} = \int_{h^*}^{\infty} w(Z | \lambda = 1) dZ = \int_{h^*}^{\infty} \frac{Z}{\sigma^2} I_0\left(\frac{ZZ_c}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{Z^2+Z_c^2}{2\sigma^2}} dZ.$$

Для того чтобы привести его к более удобному виду, сделаем следующую замену переменных:

$$x = \frac{Z}{\sigma}, \quad dx = \frac{dZ}{\sigma}, \quad x_c = \frac{Z_c}{\sigma}, \quad x_h^* = \frac{h^*}{\sigma}.$$

Тогда

$$P_{\text{обн}} = \int_{x_h^*}^{\infty} x I_0(x x_c) e^{-\frac{x^2 + x_c^2}{2}} dx = Q(x_c, x_h^*) = Q\left(\frac{Z_c}{\sigma}, \frac{h^*}{\sigma}\right),$$

где $Q(\cdot, \cdot)$ – Q -функция Маркума, которая определяется следующим образом [2, с. 436]:

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} x I_0(\alpha x) e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}} dx.$$

Интеграл, определяющий Q -функцию, аналитически не вычисляется. Для его вычисления методами численного интегрирования удобно записать Q -функцию в таком виде, чтобы оба предела интегрирования были конечными:

$$Q(\alpha, \beta) = 1 - \int_0^{\beta} x I_0(\alpha x) e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}} dx.$$

При $\alpha \gg 1$ распределение Райса приближается к нормальному распределению, поэтому

$$Q(\alpha, \beta) = 1 - \int_0^{\beta} x I_0(\alpha x) e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}} dx \approx 1 - \Phi(\beta - \alpha).$$

В заключение запишем выражения для нормированной величины $\frac{Z_c}{\sigma}$ и

для нормированного порога $\frac{h^*}{\sigma}$:

$$\frac{Z_c}{\sigma} = \frac{E_c}{\sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} \text{ – отношение сигнал-шум,}$$

$$\frac{h^*}{\sigma} = \frac{\sigma \sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}}{\sigma} = \sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}.$$

Совокупность этих формул определяет зависимость вероятности обнаружения от отношения сигнал-шум при заданной вероятности ложной тревоги – характеристику обнаружения сигнала со случайной начальной фазой:

$$P_{\text{обн}} = Q\left(\frac{Z_c}{\sigma}, \frac{h^*}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}, \sqrt{-2 \ln p_{\text{лт}}}\right).$$

На рис. 3.16 приведены характеристики обнаружения полностью известного сигнала (сплошные линии) и сигнала со случайной начальной фазой (штриховые линии) для трёх значений вероятности ложной тревоги. Видно, что во всех случаях характеристика обнаружения сигнала со случайной начальной фазой про-

ходит правее, чем для известного сигнала. Следовательно, для получения той же вероятности обнаружения требуется большее отношение сигнал-шум. Это – «плата» за то, что не известна начальная фаза принимаемого сигнала.

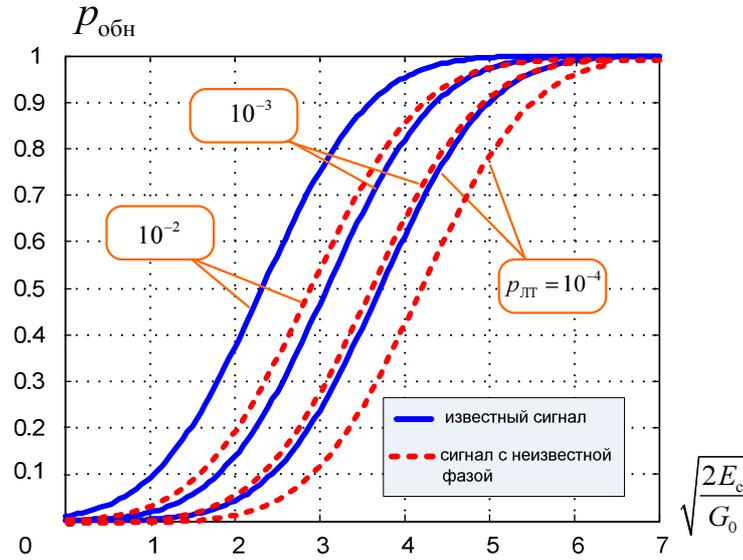


Рис. 3.16. Характеристики обнаружения

3.3. Оптимальное различение известных сигналов

Задача различения двух сигналов – также частный случай задачи оценивания дискретного параметра. Чтобы показать это, формально объединим два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в один:

$$s_\lambda(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_2(t),$$

где $\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если действует сигнал } s_1(t) \\ 0, & \text{если действует сигнал } s_2(t) \end{cases}$.

Принимаемое колебание имеет вид $y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$, и задача различения сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ сводится к оцениванию параметра λ . Как и ранее (в задаче обнаружения), апостериорная вероятность параметра λ равна

$$p_{ps}(\lambda) = C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda).$$

Найдём апостериорную вероятность для каждого из двух возможных значений параметра.

А) $\lambda = 1$ (т.е. действует сигнал $s_1(t)$)

$$s_\lambda(t) = s_1(t), \quad E_c(\lambda) = E_{c1} - \text{энергия сигнала } s_1(t).$$

Корреляционный интеграл равен

$$q(1) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_1(t)dt = q_1.$$

Тогда для апостериорной вероятности получим выражение

$$p_{ps}(1) = Ce^{q_1} e^{-\frac{E_{c1}}{G_0}} p_{pr}(1)$$

или, обозначая $p_{ps}(1) = p_{ps1}$, $p_{ps}(2) = p_{ps2}$,

$$p_{ps1} = Ce^{q_1} e^{-\frac{E_{c1}}{G_0}} p_{pr1}.$$

Б) $\lambda = 0$ (т.е. действует сигнал $s_2(t)$).

Аналогично получаем:

$$p_{ps2} = Ce^{q_2} e^{-\frac{E_{c2}}{G_0}} p_{pr2},$$

где $q_2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_2(t)dt$.

В соответствии с критерием максимума апостериорной вероятности оценка параметра λ определяется следующим образом:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ (т.е. принимается решение о наличии сигнала } s_1(t)\text{), если } p_{ps1} > p_{ps2} \\ 0 \text{ (т.е. принимается решение о наличии сигнала } s_2(t)\text{), если } p_{ps1} < p_{ps2} \end{cases}$$

Подставим в неравенство, соответствующее 1-му случаю, выражения для апостериорных вероятностей:

$$Ce^{q_1} e^{-\frac{E_{c1}}{G_0}} p_{pr1} > Ce^{q_2} e^{-\frac{E_{c2}}{G_0}} p_{pr2}.$$

Сокращая константу C и логарифмируя, получим:

$$(q_1 - q_2) > \ln \frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} + \frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}.$$

Обозначим левую часть неравенства как Δq , а правую – как h . Тогда получим следующий алгоритм оптимального различения сигналов:

$$\Delta q = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_1(t)dt - \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_2(t)dt > h .$$

Структурная схема оптимального приёмника, соответствующая этому алгоритму, показана на рис. 3.17.

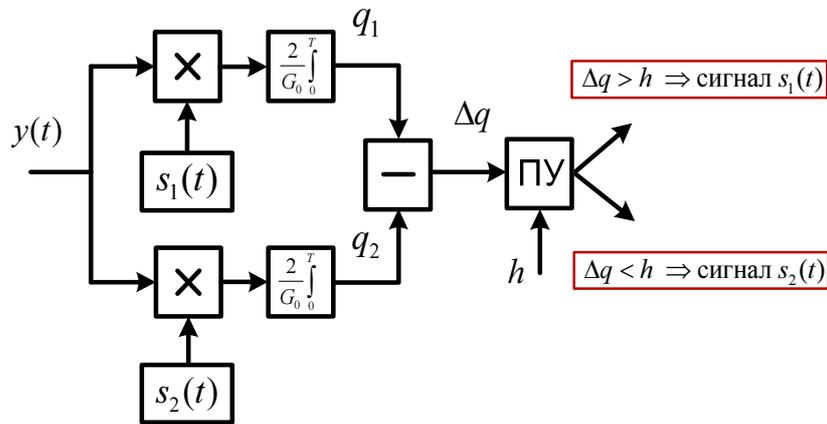


Рис. 3.17. Структурная схема оптимального приёмника для различения двух полностью известных сигналов

В состав приёмника входят генераторы опорных колебаний, два коррелятора, вычитающее устройство и пороговое устройство. Оптимальное значение порога равно

$$h = \ln \frac{P_{pr2}}{P_{pr1}} + \frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0} .$$

Дополнительные сведения

Рассмотрим влияние значений априорных вероятностей и энергии сигналов на величину порога.

1) Пусть энергия сигналов одинакова: $E_{c1} = E_{c2}$. Если при этом одинаковы априорные вероятности ($P_{pr1} = P_{pr2}$), то $h = 0$. Это означает, что решение о наличии сигнала $s_1(t)$ принимается, если $q_1 > q_2$. Этот случай характерен для цифровых систем передачи информации с бинарными сигналами. Если $P_{pr1} > P_{pr2}$, т.е., скорее всего, действует сигнал $s_1(t)$, то $h < 0$, т.е. порог понижается. В этом случае для принятия решения в пользу сигнала $s_1(t)$ создаются более благоприятные условия. Тем самым учитывается бóльшая априорная вероятность наличия сигнала $s_1(t)$. Аналогичным образом, если $P_{pr1} < P_{pr2}$, то

$h > 0$, т.е. порог повышается и тем самым создаются более благоприятные условия для принятия решения в пользу сигнала $s_2(t)$.

2) Рассмотрим влияние энергии сигнала. Если $E_{c1} < E_{c2}$, то порог понижается, что создаёт более благоприятные условия для принятия решения в пользу более слабого сигнала $s_1(t)$ и тем самым слабый сигнал, так сказать, «уравнивается в правах» с сильным. Если $E_{c1} > E_{c2}$, то, наоборот, порог повышается.

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов

Рассмотрим случай различения двух равновероятных сигналов с одинаковой энергией (это характерно для приёма бинарных сигналов в цифровых системах передачи информации):

$$\begin{cases} P_{pr1} = P_{pr2} = \frac{1}{2} \\ E_{c1} = E_{c2} = E_c \end{cases}$$

В этом случае порог $h = 0$ и, следовательно, алгоритм различения имеет вид

$$\begin{cases} \Delta q > 0 \Rightarrow \text{сигнал } s_1(t) \\ \Delta q < 0 \Rightarrow \text{сигнал } s_2(t) \end{cases}$$

В соответствии с формулой полной вероятности вероятность ошибки различения определяется выражением

$$P_{ош} = p(s_2 | s_1) \cdot P_{pr1} + p(s_1 | s_2) \cdot P_{pr2} = \frac{1}{2} [p(s_2 | s_1) + p(s_1 | s_2)],$$

где $p(s_2 | s_1)$ – условная вероятность того, что при приёме сигнала $s_1(t)$ будет принято ошибочное решение о наличии сигнала $s_2(t)$, $p(s_1 | s_2)$ – условная вероятность того, что при приёме сигнала $s_2(t)$ будет принято ошибочное решение о наличии сигнала $s_1(t)$.

Для расчёта условных вероятностей ошибок нужно знать статистические характеристики напряжения Δq на входе ПУ. Для этого, прежде всего, в напряжении Δq выделим сигнальную составляющую Δq_c и шумовую $\Delta q_{ш}$:

$$\Delta q = q_1 - q_2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)(s_1(t) - s_2(t)) dt = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)\Delta s(t) dt = \Delta q_c + \Delta q_{ш}.$$

Здесь $\Delta s(t) = s_1(t) - s_2(t)$. Сигнальная составляющая зависит от того, какой сигнал фактически действует на входе приёмника:

$$\Delta q_c = \begin{cases} (\Delta q_c | s_1) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s_1(t)\Delta s(t) dt, & \text{если действует } s_1(t) \\ (\Delta q_c | s_2) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s_2(t)\Delta s(t) dt, & \text{если действует } s_2(t) \end{cases}.$$

Шумовая составляющая от этого не зависит и равна:

$$\Delta q_{ш} = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)\Delta s(t) dt.$$

Поскольку среднее значение шума равно 0, то среднее значение шумовой составляющей напряжения Δq на входе ПУ также равно 0. Следовательно, математическое ожидание (среднее значение) этого напряжения определяется только сигнальной составляющей:

$$\overline{\Delta q} = \Delta q_c.$$

Поэтому напряжение Δq на входе ПУ имеет нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием Δq_c и дисперсией $\sigma_{\Delta q_{ш}}^2$. Условная плотность вероятности этого распределения определяется выражениями

$$w(\Delta q | s_1) = \frac{1}{\sigma_{\Delta q_{ш}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\Delta q - (\Delta q_c | s_1))^2}{2\sigma_{\Delta q_{ш}}^2}\right),$$

$$w(\Delta q | s_2) = \frac{1}{\sigma_{\Delta q_{ш}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\Delta q - (\Delta q_c | s_2))^2}{2\sigma_{\Delta q_{ш}}^2}\right).$$

Видно, что $w(\Delta q | s_1)$ и $w(\Delta q | s_2)$ различаются только значением математического ожидания.

Получим выражения для параметров распределения вероятностей.

- 1) Найдём дисперсию шумовой составляющей

$$\Delta q_{\text{ш}} = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t) \Delta s(t) dt .$$

Рассматривая разность сигналов $\Delta s(t)$ как некоторый новый сигнал, можно получить выражение для $\sigma_{\Delta q_{\text{ш}}}^2$ такого же вида, как полученное ранее выражение для дисперсии шумовой составляющей напряжения на выходе коррелятора:

$$\sigma_{\Delta q_{\text{ш}}}^2 = \frac{2E_{\Delta s}}{G_0},$$

где $E_{\Delta s} = \int_0^T \Delta s(t)^2 dt$ – энергия разности сигналов.

Преобразуем выражение для энергии разности сигналов:

$$\begin{aligned} E_{\Delta s} &= \int_0^T \Delta s(t)^2 dt = \int_0^T (s_1(t) - s_2(t))^2 dt = \int_0^T s_1(t)^2 dt - 2 \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt + \int_0^T s_2(t)^2 dt = \\ &= E_{c1} - 2 \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt + E_{c2}. \end{aligned}$$

Поскольку $E_{c1} = E_{c2} = E_c$, то можно записать, что

$$E_{\Delta s} = 2E_c \left[1 - \frac{1}{E_c} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \right] = 2E_c (1 - r_{12}),$$

где $r_{12} = \frac{1}{E_c} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt$ – коэффициент взаимной корреляции сигналов.

Таким образом,

$$\sigma_{\Delta q_{\text{ш}}}^2 = \frac{4E_c (1 - r_{12})}{G_0}.$$

2) Найдём сигнальную составляющую напряжения на входе ПУ:

А) при действии сигнала $s_1(t)$

$$\begin{aligned} (\Delta q_c | s_1) &= \frac{2}{G_0} \int_0^T s_1(t) \Delta s(t) dt = \frac{2}{G_0} \int_0^T s_1(t) (s_1(t) - s_2(t)) dt = \\ &= \frac{2}{G_0} \left[\int_0^T s_1^2(t) dt - \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \right] = \frac{2E_c (1 - r_{12})}{G_0}; \end{aligned}$$

Б) при действии сигнала $s_2(t)$

$$\begin{aligned} (\Delta q_c | s_2) &= \frac{2}{G_0} \int_0^T s_2(t) \Delta s(t) dt = \frac{2}{G_0} \int_0^T s_2(t) (s_1(t) - s_2(t)) dt = \\ &= \frac{2E_c (r_{12} - 1)}{G_0} = -(\Delta q_c | s_1). \end{aligned}$$

Таким образом, условные плотности вероятности напряжения на входе ПУ характеризуются тем, что имеют одинаковую дисперсию

$$\sigma_{\Delta q_{ш}}^2 = \frac{4E_c (1 - r_{12})}{G_0}$$

и противоположное по знаку математическое ожидание: $(\Delta q_c | s_1) = \frac{2E_c (1 - r_{12})}{G_0}$ в случае действия сигнала $s_1(t)$ и

$(\Delta q_c | s_2) = -\frac{2E_c (1 - r_{12})}{G_0}$ в случае действия сигнала $s_2(t)$. Графики условной плотности вероятности показаны на рис. 3.18.

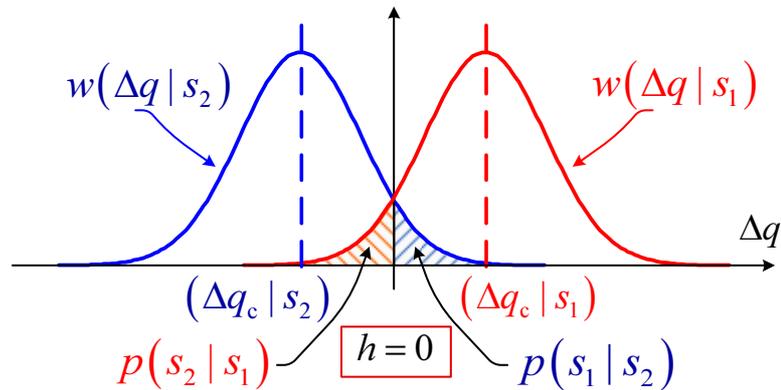


Рис. 3.18. Условная плотность вероятности разности корреляционных интегралов

Условные вероятности ошибок определяются выражениями

$$\begin{aligned} p(s_1 | s_2) &= \mathbb{P}\{\Delta q > h | s_2\} = \int_{h=0}^{\infty} w(\Delta q | s_2) d(\Delta q), \\ p(s_2 | s_1) &= \mathbb{P}\{\Delta q < h | s_1\} = \int_{-\infty}^{h=0} w(\Delta q | s_1) d(\Delta q), \end{aligned}$$

которые определяют площади под соответствующими участками графиков плотности вероятности. Из рис. 3.18 следует, что эти вероятности одинаковы:

$$p(s_2 | s_1) = p(s_1 | s_2).$$

Поэтому достаточно получить выражение для одной из них, например, для $p(s_2 | s_1)$:

$$\begin{aligned} p(s_2 | s_1) &= \int_{-\infty}^0 w(\Delta q | s_1) d(\Delta q) = \Phi\left(\frac{0 - (\Delta q_c | s_1)}{\sigma_{\Delta q}}\right) = \Phi\left(\frac{-\frac{2E_c}{G_0}(1 - r_{12})}{\sqrt{\frac{4E_c(1 - r_{12})}{G_0}}}\right) = \\ &= \Phi\left(-\sqrt{\frac{E_c}{G_0}(1 - r_{12})}\right) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{т.к. } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}}}{=} 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_c}{G_0}(1 - r_{12})}\right). \end{aligned}$$

Теперь найдём полную (безусловную) вероятность ошибки. С учётом того, что $p(s_2 | s_1) = p(s_1 | s_2)$ она равна

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [p(s_2 | s_1) + p(s_1 | s_2)] = p(s_2 | s_1).$$

Следовательно,

$$p_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_c}{G_0}(1 - r_{12})}\right).$$

Посмотрим, как влияет величина коэффициента взаимной корреляции сигналов на вероятность ошибки. Из определения коэффициента взаимной корреляции следует, что

$$-1 \leq r_{12} \leq 1.$$

Поскольку интеграл вероятности $\Phi(\cdot)$ – монотонно возрастающая функция, то наименьшая вероятность ошибки будет при наибольшем значении аргумента этой функции, т.е. при $r_{12} = -1$. Это – случай **противоположных сигналов**:

$$s_2(t) = -s_1(t).$$

Этим свойством обладают радиоимпульсы с начальной фазой 0 и π . Последовательность таких импульсов образует сигнал с бинарной фазовой манипуляцией. Вероятность ошибки в этом случае равна

$$P_{\text{ош. противоп}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right) = P_{\text{ош min}} .$$

В теории цифровых систем передачи информации отношение $\frac{E_c}{G_0}$ обычно называют двоичным (символьным) отношением сигнал-шум $q_{\text{дв}}$ и выражают в децибелах.

Наряду с противоположными, часто используют также ортогональные сигналы, для которых $r_{12} = 0$. В этом случае вероятность ошибки, равная

$$P_{\text{ош. орт}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_c}{G_0}}\right),$$

будет больше, чем для противоположных сигналов. Из сравнения выражений для $P_{\text{ош. противоп}}$ и $P_{\text{ош. орт}}$ следует, что при использовании ортогональных сигналов для получения такой же вероятности ошибки, как в случае противоположных сигналов, нужно увеличить энергию сигнала в 2 раза, т.е. на 3 дБ. В качестве ортогональных сигналов часто используют радиоимпульсы с различной частотой: f_1 и f_2 . Если длительность импульса T_c и разность частот $\Delta f = |f_1 - f_2|$ удовлетворяют условию $T_c \Delta f = n$, где n – целое число, то эти сигналы будут ортогональными. Последовательность таких импульсов образует сигнал с бинарной частотной манипуляцией. Противоположные сигналы с помощью частотной манипуляции реализовать нельзя.

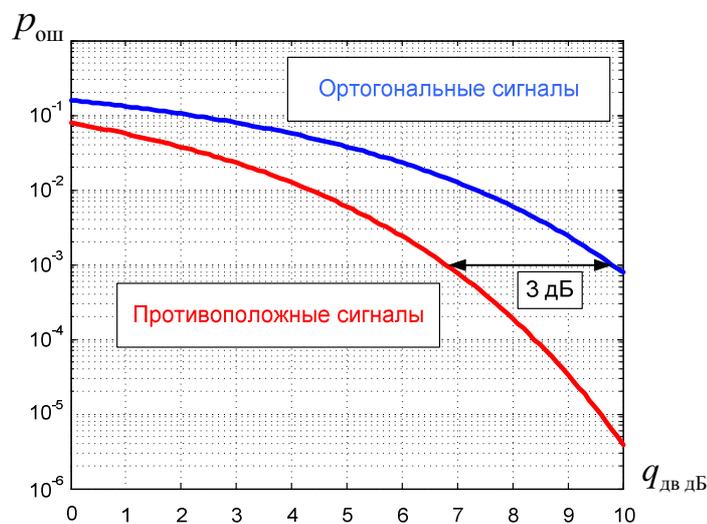


Рис. 3.19. Зависимости вероятности ошибки от двоичного отношения сигнал-шум

Поскольку вероятность ошибки зависит от двоичного отношения сигнал-шум $q_{дв} = \frac{E_c}{G_0}$, то при сравнении различных приёмников (как оптимальных, так и неоптимальных), работающих с различными сигналами, обычно используют графики зависимости $p_{ош}(q_{дв})$, которые строят в двойном логарифмическом масштабе: по горизонтальной оси откладывают двоичное отношение сигнал-шум в децибелах, по вертикальной оси – логарифм вероятности ошибки. На рис. 3.19 приведены такие зависимости для противоположных и ортогональных сигналов.

Оптимальным приёмником для различения M равновероятных сигналов с одинаковой энергией является многоканальный корреляционный приёмник, в котором измеряемый параметр λ – номер сигнала. Структурная схема такого приёмника изображена на рис. 3.20. Формула для вероятности ошибки в случае ортогональных сигналов приведена в [1, с. 117-118].

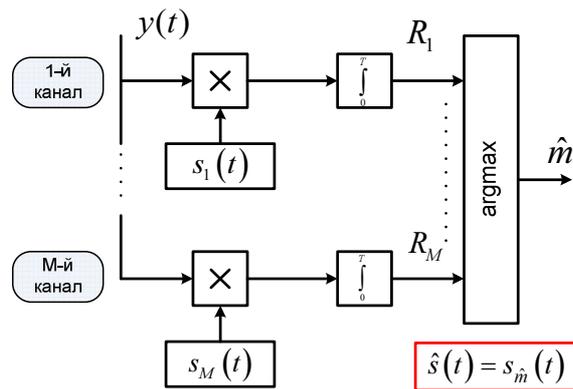


Рис. 3.20. Структурная схема оптимального приёмника для различения M полностью известных сигналов

3.4. Оптимальная обработка сигналов с использованием согласованных фильтров

Согласованный фильтр

Рассматривая структуру оптимального приёмника, мы видели, что основной операцией оптимальной обработки является вычисление корреляционного интеграла, т.е. интеграла от произведения принятого колебания и опорного сигнала. Эта операция может быть реализована не только с помощью коррелятора, но и с помощью так называемого согласованного фильтра (СФ).

Согласованным фильтром называется такое линейное устройство, которое при действии смеси сигнала и белого шума обеспечивает на выходе максимально возможное отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума.

Характеристики согласованного фильтра полностью определяются видом того сигнала $s(t)$, с которым он согласован.

Известно [1, 2], что импульсная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отражением сигнала, сдвинутым (задержанным) на некоторое время t_0 :

$$g_{\text{СФ}}(t) = c s(t_0 - t).$$

Здесь t_0 – момент времени, когда достигается пиковое значение сигнала на выходе СФ, c – произвольный коэффициент. Для того чтобы СФ был физически реализуемым, время t_0 должно быть не менее длительности сигнала (импульса) τ_n . Делать его больше, чем τ_n (т.е. вводить дополнительную задержку) нецелесообразно. Поэтому обычно принимают $t_0 = \tau_n$.

На рис. 3.21 в качестве примера показаны эюры сигнала $s(t)$, его зеркальное отражение $s(-t)$ (рис. 3.21,а) и импульсные характеристики СФ при $t_0 = \tau_n$ (рис. 3.21,б) и $t'_0 > \tau_n$ (рис. 3.21,в).

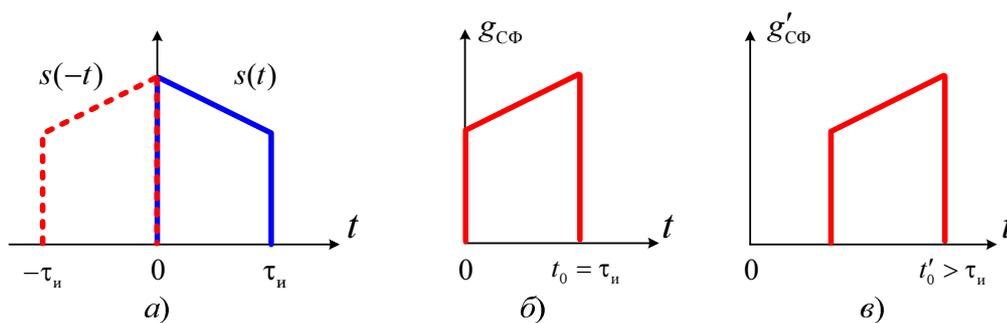


Рис. 3.21. Эюры сигнала и импульсной характеристики согласованного фильтра

Найдём комплексную передаточную функцию СФ. Она определяется как преобразование Фурье импульсной характеристики:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) &= \mathbb{F}\{g_{\text{СФ}}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} cs(t_0 - t)e^{-j\omega t} dt = \left. \begin{array}{l} t_0 - t = x \\ t = t_0 - x \\ dt = -dx \end{array} \right\} = \\ &= c \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{-j\omega(t_0 - x)} d(-x) = -c \int_{+\infty}^{-\infty} s(x)e^{-j\omega t_0} e^{j\omega x} dx = \\ &= ce^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{j\omega x} dx = c\dot{S}^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \end{aligned}$$

где $\dot{S}(j\omega) = \mathbb{F}\{s(t)\}$ – комплексный спектр сигнала. Таким образом,

$$\dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) = c\dot{S}^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

АЧХ СФ равна

$$K_{\text{СФ}}(\omega) = \left| \dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) \right| = cS(\omega),$$

где $S(\omega) = \left| \dot{S}(j\omega) \right|$ – амплитудный спектр сигнала. ФЧХ СФ определяется выражением

$$\varphi_{\text{СФ}}(\omega) = \arg \dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) = -\Phi(\omega) - \omega t_0,$$

где $\Phi(\omega) = \arg \dot{S}(j\omega)$ – фазовый спектр сигнала.

Найдём отклик согласованного фильтра на сигнал, с которым он согласован. Он определяется как свёртка сигнала с импульсной характеристикой:

$$\begin{aligned} s_{\text{ВЫХ}}(t) &= g_{\text{СФ}}(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\text{СФ}}(\tau)s(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} c s(t_0 - \tau) s(t - \tau)d\tau = \left. \begin{array}{l} x = t_0 - \tau \end{array} \right\} = \\ &= c \int_{-\infty}^{+\infty} s(t_0 - \tau)s((t_0 - \tau) + (t - t_0))d\tau = c \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) s(x + (t - t_0))dx = cR_s(t - t_0), \end{aligned}$$

где $R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) s(x + \tau)dx$ – автокорреляционная функция сигнала.

Видно, что отклик согласованного фильтра на сигнал с точностью до коэффициента равен автокорреляционной функции сигнала, сдвинутой на t_0 . Следовательно, при прохождении через согласованный фильтр

сигнал значительно искажается. Пиковое значение выходного сигнала достигается в момент времени t_0 и равно

$$s_{\text{ВЫХ.макс}} = s_{\text{ВЫХ}}(t_0) = c \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t_0 - \tau) d\tau = cE_c.$$

Итак, пиковое значение отклика СФ на сигнал не зависит от вида сигнала и с точностью до коэффициента равно его энергии.

Пример: для прямоугольного импульса с амплитудой U_c и длительностью $\tau_{\text{и}}$ (рис. 3.22,а) отклик СФ имеет вид треугольного импульса, который начинается в нулевой момент времени и заканчивается в момент времени $2\tau_{\text{и}}$ (рис. 3.22,б). Энергия сигнала, определяющая пиковое значение отклика СФ, равна $E_c = U_c^2 \tau_{\text{и}}$.

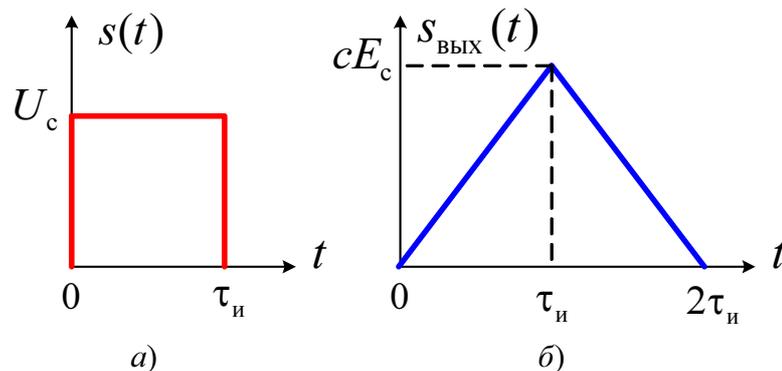


Рис. 3.22. Прямоугольный видеоимпульс (а) и отклик на него согласованного фильтра (б)

Покажем, что СФ может быть использован вместо коррелятора. Для этого найдём отклик фильтра, согласованного с сигналом $s_{\lambda}(t)$, на смесь сигнала и шума $y(t) = s_{\lambda}(t) + n(t)$:

$$\begin{aligned} y_{\text{ВЫХ}}(t) &= y(t) * g_{\text{СФ}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) g_{\text{СФ}}(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) [c s_{\lambda}(t_0 - (t - \tau))] d\tau = c \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) s_{\lambda}(\tau + t_0 - t) d\tau. \end{aligned}$$

В момент времени t_0

$$y_{\text{ВЫХ}}(t_0) = c \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) s_{\lambda}(\tau) d\tau.$$

Сравним это выражение с формулой, определяющей корреляционный интеграл:

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_\lambda(t) dt .$$

Если мы ограничим длительность принимаемого колебания интервалом $[0, T]$, то эти два выражения с точностью до коэффициента совпадают. Следовательно, СФ можно использовать для вычисления корреляционного интеграла. Поэтому можно ожидать, что отношение сигнал-шум на выходе СФ в момент времени t_0 (т.е. в момент максимума отклика СФ) будет таким же, как отношение сигнал-шум на выходе коррелятора. Проверим это.

Максимальное значение отклика СФ на сигнал ранее уже было найдено:

$$s_{\text{вых.мах}} = cE_c .$$

Найдём дисперсию шума на выходе СФ. В установившемся режиме (т.е. спустя достаточно большое время после начала воздействия колебания $y(t)$ на СФ) она определяется как интеграл от энергетического спектра $G_{\text{вых}}(f)$ шума на выходе СФ:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ш.вых}}^2 &= \int_0^\infty G_{\text{вых}}(f) df = \int_0^\infty G_0 K_{\text{СФ}}^2(f) df = \\ &= \frac{G_0}{2\pi} \int_0^\infty K_{\text{СФ}}^2(\omega) d\omega = \frac{G_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_{\text{СФ}}^2(\omega) d\omega . \end{aligned}$$

Поскольку передаточная функция СФ равна преобразованию Фурье его импульсной характеристики, то далее мы можем воспользоваться теоремой Парсеваля, которая связывает интеграл от квадрата функции с интегралом от квадрата модуля её преобразования Фурье. Применительно к характеристикам СФ это соотношение выглядит так:

$$\int_{-\infty}^\infty g_{\text{СФ}}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_{\text{СФ}}^2(\omega) d\omega .$$

Таким образом,

$$\sigma_{\text{ш.вых}}^2 = \frac{G_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_{\text{СФ}}^2(\omega) d\omega = \frac{G_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^\infty g_{\text{СФ}}^2(t) dt =$$

$$= \frac{G_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 s^2(t_0 - t) dt = c^2 \frac{G_0}{2} E_c.$$

Следовательно, СКО шума на выходе СФ равно

$$\sigma_{\text{ш.ВЫХ}} = c \sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}$$

и поэтому отношение сигнал-шум на выходе СФ определяется выражением

$$\rho_{\text{СФ}} = \frac{s_{\text{ВЫХ.МАХ}}}{\sigma_{\text{ш.ВЫХ}}} = \frac{cE_c}{c \sqrt{\frac{G_0}{2} E_c}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}.$$

Таким образом, получили такое же выражение для максимального отношения сигнал-шум, как и в случае коррелятора.

Максимальное отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра не зависит от вида сигнала и определяется только отношением его энергии к спектральной плотности шума.

Теперь вернёмся к передаточной функции СФ и рассмотрим физический смысл выражений для его АЧХ и ФЧХ.

АЧХ согласованного фильтра равна

$$K_{\text{СФ}}(\omega) = cS(\omega),$$

т.е. с точностью до коэффициента совпадает с амплитудным спектром сигнала. Это обеспечивает выделение наиболее интенсивных участков спектра сигнала – они «подчёркиваются» фильтром. Слабые участки спектра, где преобладает шум, фильтр дополнительно ослабляет. Тем самым создаются более благоприятные условия для тех участков спектра, где отношение сигнал-шум больше, а участки спектра, где уровень сигнала мал, подавляются.

ФЧХ согласованного фильтра равна сумме фазового спектра с обратным знаком и слагаемого $-\omega t_0$, обусловленного задержкой на t_0 :

$$\varphi_{\text{СФ}}(\omega) = \arg \dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) = -\Phi(\omega) - \omega t_0.$$

ФЧХ СФ обеспечивает синфазное сложение различных частотных составляющих спектра сигнала в момент времени t_0 , благодаря чему и формируется максимум (пик) отклика фильтра.

Далее рассмотрим примеры структурных схем оптимальных приёмников, в которых для получения корреляционного интеграла вместо коррелятора используется СФ и устройство взятия отсчёта в момент времени t_0 .

Оптимальный приёмник, предназначенный для измерения неэнергетического параметра λ с равномерным априорным распределением вероятностей

В таком приёмнике оценка параметра определяется как

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{m=1, \overline{M}} q(\lambda_m) = \arg \max_{m=1, \overline{M}} y_{\text{вых. } \lambda_m}(t_0),$$

где $y_{\text{вых. } \lambda_m}(t_0)$ – напряжение на выходе фильтра, согласованного с сигналом, имеющим значение параметра λ_m . Структурная схема оптимального приёмника показана на рис. 3.23. На этой схеме СФ_{λ_m} – фильтр, согласованный с сигналом $s_{\lambda_m}(t)$, параметр которого имеет значение λ_m .

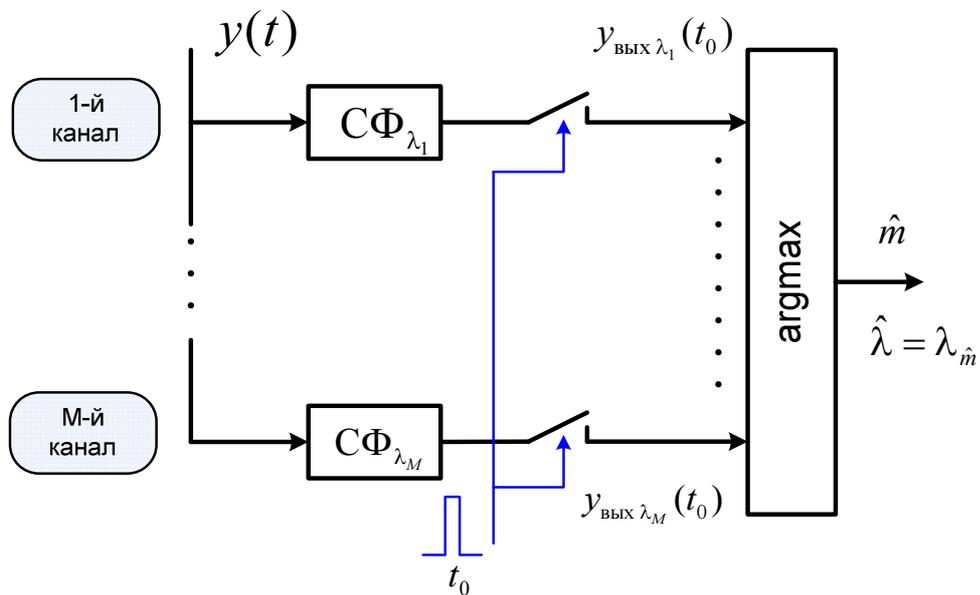


Рис. 3.23. Структурная схема оптимального приёмника с согласованными фильтрами

В состав приёмника входят:

- набор согласованных фильтров, соответствующих различным значениям оцениваемого параметра;

- электронные ключи, обеспечивающие отсчёт напряжения на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0 , когда отношение сигнал-шум максимально;
- схема сравнения отсчётов напряжений и выбора канала с максимальным значением отсчёта.

Частный случай такого приёмника – приёмник, предназначенный для измерения задержки импульсного сигнала. В этом случае оцениваемый параметр $\lambda = \tau$, и импульсные характеристики согласованных фильтров, соответствующих различным значениям параметра, будут отличаться только сдвигом по времени. Поэтому вместо M согласованных фильтров можно использовать один, но отсчёты напряжения на его выходе производить в различные моменты времени. Тогда оценка задержки будет определяться номером максимального отсчёта. На рис. 3.24 показаны эпюры напряжения на входе и выходе согласованного фильтра в случае действия смеси сигнала в виде прямоугольного импульса и шума. На нижнем графике отмечены моменты времени, в которые берутся отсчёты напряжения. Максимальному отсчёту соответствует момент $t_{\hat{m}}$.

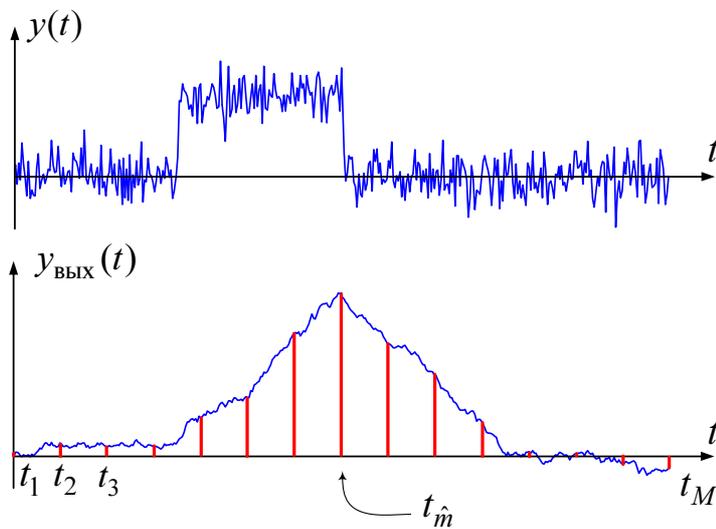


Рис. 3.24. Эпюры напряжения на входе и выходе СФ при действии смеси сигнала и шума

Так как максимум отклика СФ на сигнал образуется в момент окончания сигнала (см. рис. 3.22), а измеряемый параметр, задержка, определяется по положению фронта импульса (см. рис. 3.5), то оценка задержки сигнала определяется как

$$\hat{\tau} = t_{\hat{m}} - \tau_{\text{и}} = \arg \max_{m=1, \overline{M}} y_{\text{ВЫХ}}(t_m) - \tau_{\text{и}}.$$

Структурная схема оптимального приёмника для измерения задержки изображена на рис. 3.25. В состав приёмника входят:

- согласованный фильтр;
- устройство взятия отсчётов в моменты времени $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_M$ (электронный ключ);
- устройство запоминания отсчётов и сравнения их между собой.

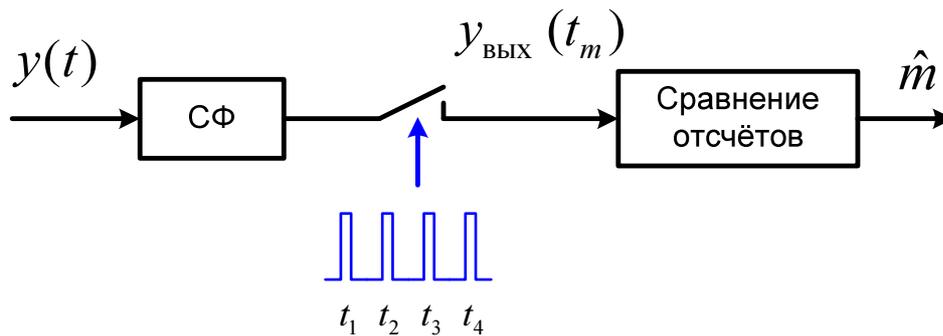


Рис. 3.25. Структурная схема оптимального приёмника с СФ для измерения задержки сигнала

Прежде чем перейти к другим примерам схем оптимального приёмника с СФ, выясним, как практически реализовать фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом. Для этого рассмотрим импульсную характеристику фильтра

$$g_{\text{СФ}}(t) = c s(t_0 - t), \quad t_0 = \tau_{\text{и}}.$$

Примем для простоты, что $c = \frac{1}{U_c}$. Тогда получим, что импульсная характеристика имеет вид прямоугольного импульса единичной амплитуды длительностью $\tau_{\text{и}}$ (рис. 3.26,а). Представим этот импульс в виде разности двух ступенчатых функций (функций Хевисайда), одна из которых начинается в нулевой момент времени (рис. 3.26,б), а другая задержана на время $t_0 = \tau_{\text{и}}$ (рис. 3.26,в).

Устройством, имеющим импульсную характеристику в виде функции Хевисайда, является интегратор, а в виде сдвинутой функции Хевисайда – интегратор с элементом задержки на $\tau_{\text{и}}$. Следовательно, фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом, состоит из

интегратора^{*)}, элемента задержки на $\tau_{и}$ и вычитающего устройства. Его структурная схема изображена на рис. 3.27. Можно показать, что отклик такого устройства на сигнал, с которым согласован фильтр, имеет вид треугольного импульса длительностью $2\tau_{и}$ (см. рис. 3.22).

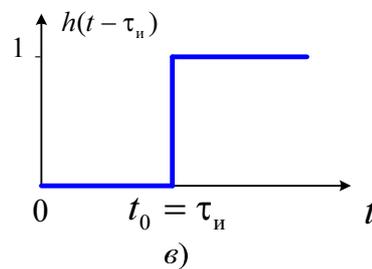
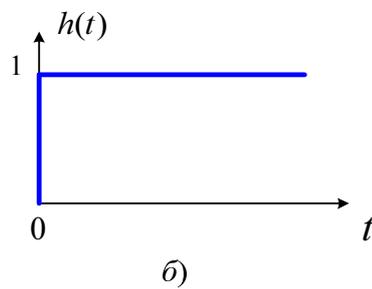
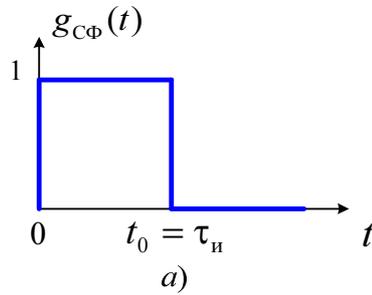


Рис. 3.26. Представление импульсной характеристики фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

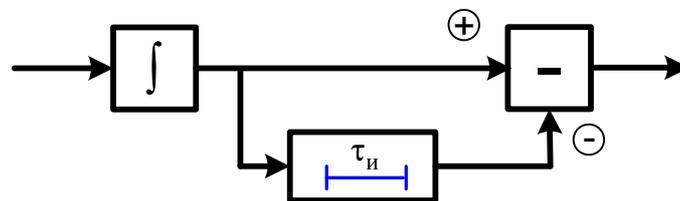


Рис. 3.27. Структурная схема фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом

^{*)} Если в приёмнике требуется получить отсчёт только в момент времени $t_0 = \tau_{и}$, то в качестве интегратора обычно применяется интегратор со сбросом, выходное напряжение которого после взятия отсчёта устанавливается равным 0.

Аналогичным образом может быть реализован фильтр, согласованный с радиоимпульсом с прямоугольной огибающей. В этом случае требуемая импульсная характеристика также имеет вид радиоимпульса (рис. 3.28).

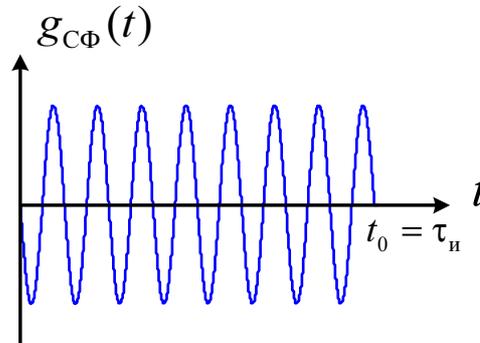


Рис. 3.28. Импульсная характеристика фильтра, согласованного с радиоимпульсом с прямоугольной огибающей

Для получения такой импульсной характеристики нужно в предыдущей схеме (рис. 3.27) заменить интегратор узкополосным фильтром (УФ) (выполненным, например, на основе кварцевого резонатора), частота собственных колебаний которого равна частоте сигнала. Поскольку согласованная фильтрация радиоимпульса обычно осуществляется на промежуточной частоте, то такой фильтр называют также интегратором промежуточной частоты. Схема СФ для радиоимпульса показана на рис. 3.29. Если в течение длительности импульса затухание собственных колебаний фильтра пренебрежимо мало, то импульсная характеристика такого устройства имеет требуемый вид.

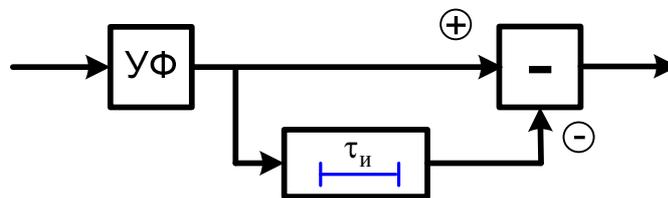


Рис. 3.29. Структурная схема фильтра, согласованного с радиоимпульсом с прямоугольной огибающей

Рассмотрим отклик СФ на радиоимпульс, с которым он согласован. Начальную фазу радиоимпульса примем равной 0. На рис. 3.30,а показаны эюры радиоимпульса, импульсная характеристика СФ (при $t_0 = \tau_{и}$) и отклик СФ. Видно, что в момент времени $t = \tau_{и}$, когда берёт-

ся отсчёт отклика СФ, мгновенное значение напряжения на выходе СФ максимально.

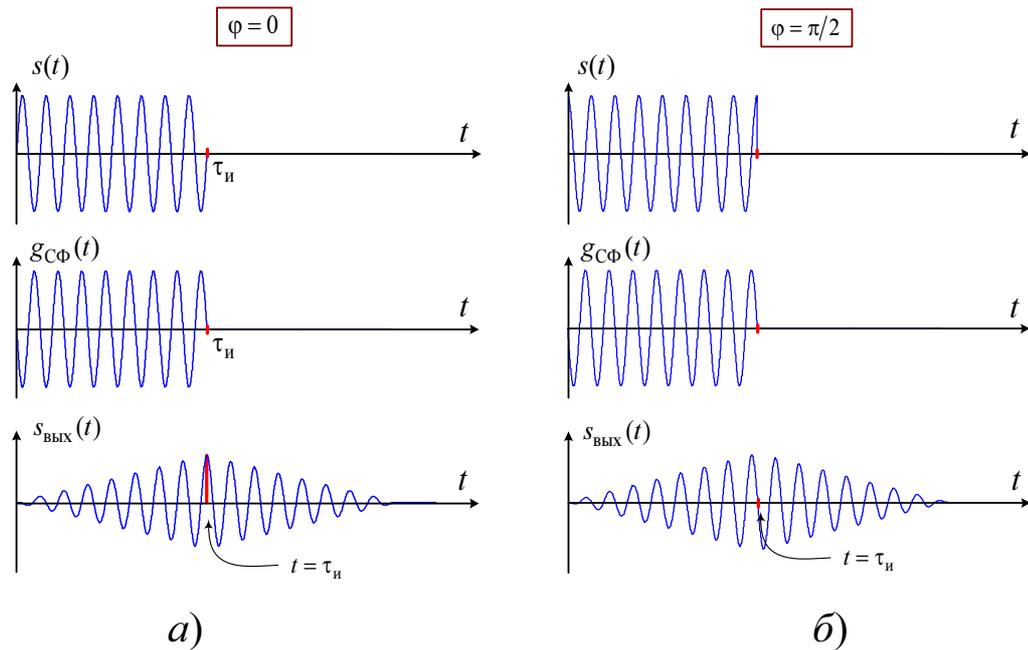


Рис. 3.30. Колебание на входе СФ, импульсная характеристика, отклик СФ

Если изменить начальную фазу сигнала, но оставить СФ с той же самой импульсной характеристикой, то фаза отклика фильтра изменится, и в момент взятия отсчёта мгновенное значение напряжения уже не будет максимальным. В частности, если фаза входного сигнала отличается от фазы радиоимпульса, с которым согласован фильтр, на $\pi/2$, то мгновенное значение напряжения на выходе СФ в момент времени $t = \tau_{и}$ будет равно 0 (рис. 3.30,б). Поэтому при использовании СФ

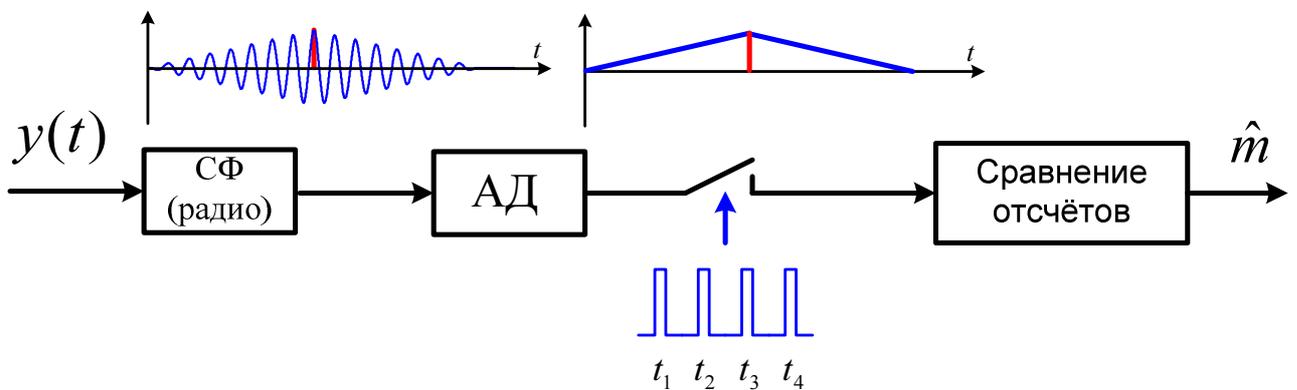


Рис. 3.31. Структурная схема оптимального приёмника для измерения задержки сигнала со случайной начальной фазой – схема с фильтром, согласованным с радиоимпульсом

в оптимальном приёмнике радиоимпульсов с неизвестной начальной фазой после фильтра ставится амплитудный детектор (рис. 3.31). Можно показать, что в этом случае отсчёт напряжения на выходе детектора с точностью до коэффициента будет совпадать с напряжением $Z(\tau)$, которое формируется в схеме корреляционного приёмника с квадратурными каналами. Поэтому для реализации оптимального приёмника сигнала с неизвестной начальной фазой может также использоваться схема с квадратурными каналами. В этом случае в каждом квадратурном канале ставится фильтр, согласованный с видеоимпульсом. Структурная схема такого оптимального приёмника показана на рис. 3.32.

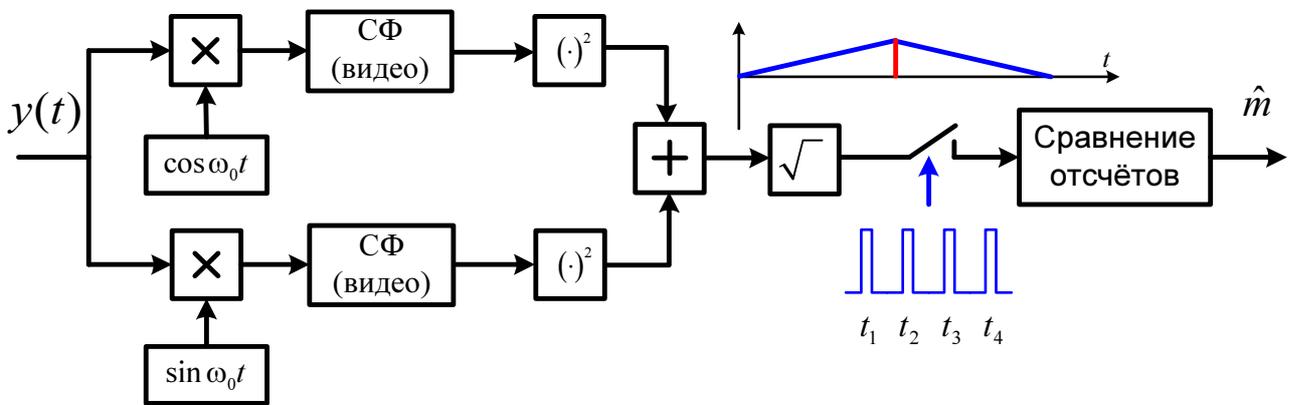


Рис. 3.32. Структурная схема оптимального приёмника для измерения задержки радиоимпульса со случайной начальной фазой – схема с квадратурными каналами и с фильтрами, согласованными с видеоимпульсом

Схему оптимального приёмника узкополосных радиосигналов, в котором используется и умножение сигнала на опорные колебания, и согласованная фильтрация видеоимпульсов, называют *корреляционно-фильтровой*. Это самый распространённый вариант реализации оптимальных приёмников.

Рассмотрим примеры схем оптимальных корреляционно-фильтровых приёмников.

Пример 1. Оптимальный обнаружитель радиоимпульса со случайной начальной фазой.

Схема оптимального обнаружителя приведена на рис. 3.33. Согласованные фильтры для видеоимпульса построены по схеме, изображённой на рис. 3.27. (Заметим, что операцию извлечения квадрат-

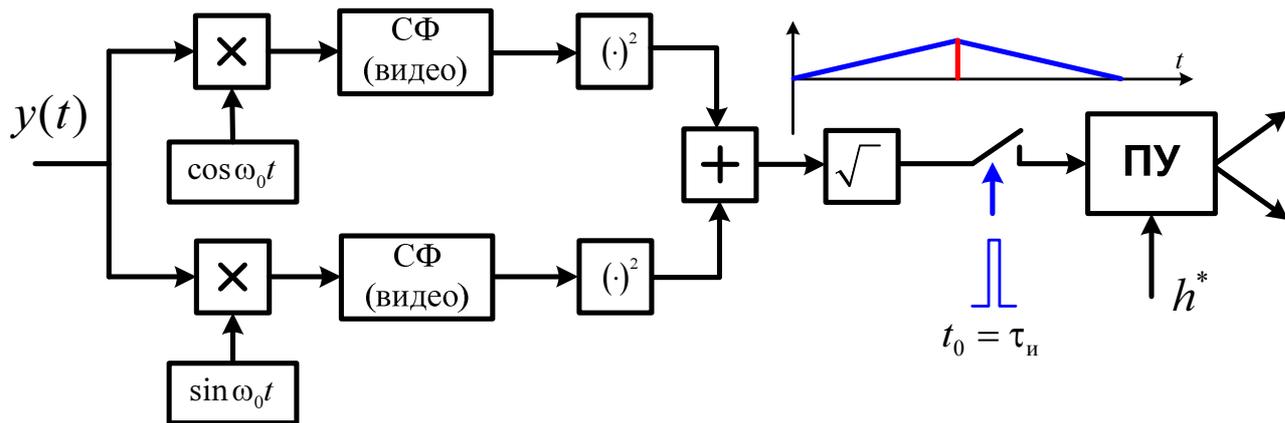


Рис. 3.33. Структурная схема оптимального обнаружителя радиоимпульса со случайной начальной фазой

ного корня можно исключить, если напряжение порога порогового устройства сделать равным $(h^*)^2$.

Пример 2. Оптимальный приёмник для различения двух равновероятных радиоимпульсов одинаковой длительности с различной частотой и со случайной начальной фазой (приёмник некогерентного сигнала с бинарной частотной манипуляцией).

Схема оптимального приёмника приведена на рис. 3.32. Здесь

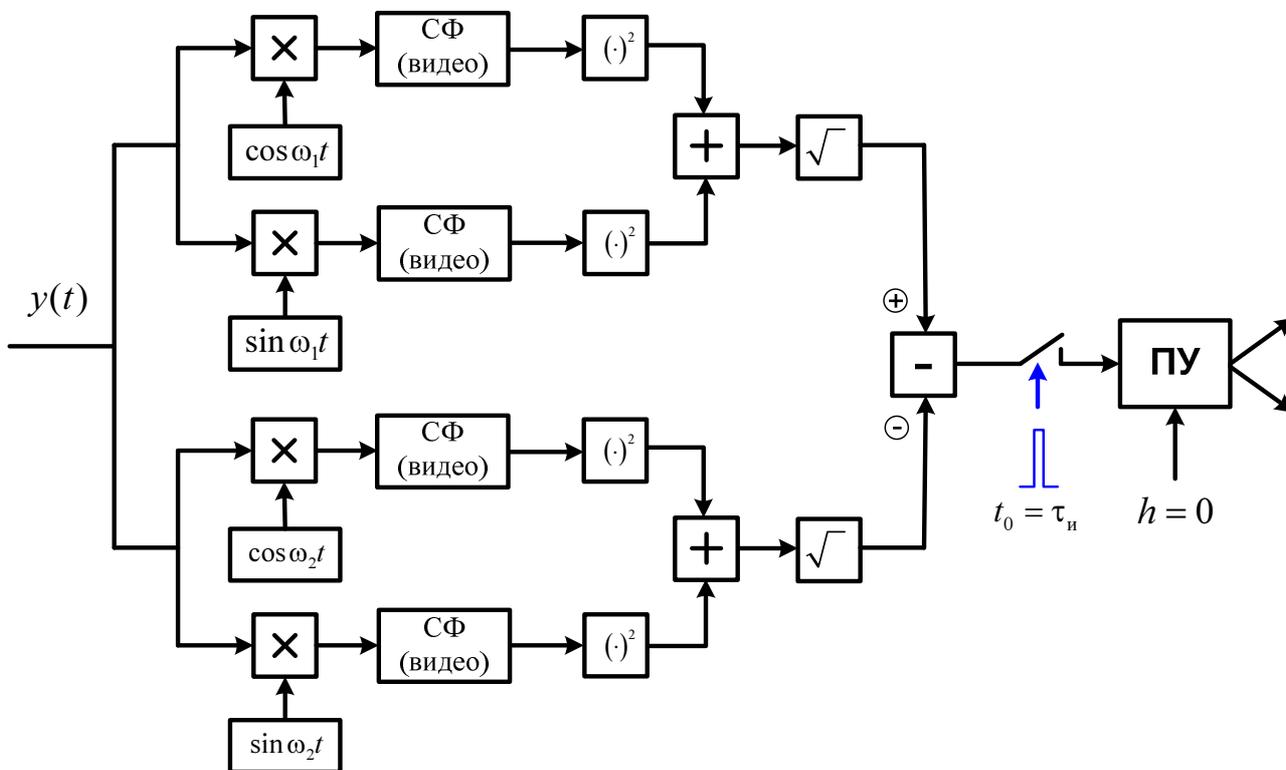


Рис. 3.34. Структурная схема оптимального приёмника некогерентного сигнала с бинарной частотной манипуляцией

также согласованные фильтры для видеоимпульса построены по схеме рис. 3.27. (В этой схеме, так же как и в предыдущем примере, можно исключить операцию извлечения квадратного корня; при этом изменять порог порогового устройства не требуется, т.к. он равен 0).

Пример 3. Оптимальный приёмник для измерения задержки радиоимпульса с фазовой манипуляцией кодом Баркера и со случайной начальной фазой.

Сигналы с фазовой манипуляцией кодом Баркера применяются в радиолокации. Они состоят из N элементарных сигналов (символов) и имеют автокорреляционную функцию, уровень боковых лепестков которой равен $1/N$ относительно главного лепестка. Коды Баркера существуют для числа символов $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Фазоманипулированный сигнал получается умножением гармонического колебания на модулирующую функцию $U(t)$, имеющую значения ± 1 . В качестве примера рассмотрим код Баркера с $N = 3$, хотя на практике обычно используются коды с бóльшим числом символов. Модулирующая функция, соответствующая такому коду, изображена на рис. 3.35. Здесь $T = \tau_{и} / N$ – длительность одного символа кода.

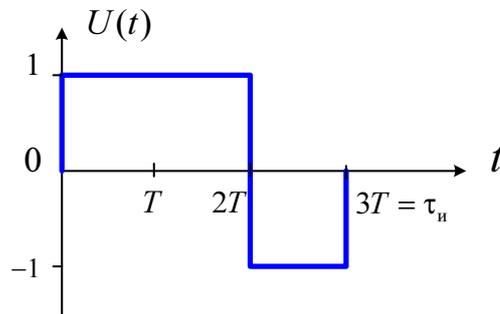


Рис. 3.35. Модулирующая функция кода Баркера ($N = 3$)

В обоих квадратурных каналах приёмника стоят фильтры, согласованные с модулирующей функцией. Определим структуру такого СФ, используя его импульсную характеристику (рис. 3.36,а). Для этого представим её в виде суммы трёх ступенчатых функций (рис. 3.36,б):

$$g_{сф}(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t).$$

Каждая из этих функций выражается через функцию Хевисайда

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}. \quad \text{Как уже отмечалось, устройством, имеющим им-}$$

пульсную характеристику в виде функции Хевисайда, является интегратор.

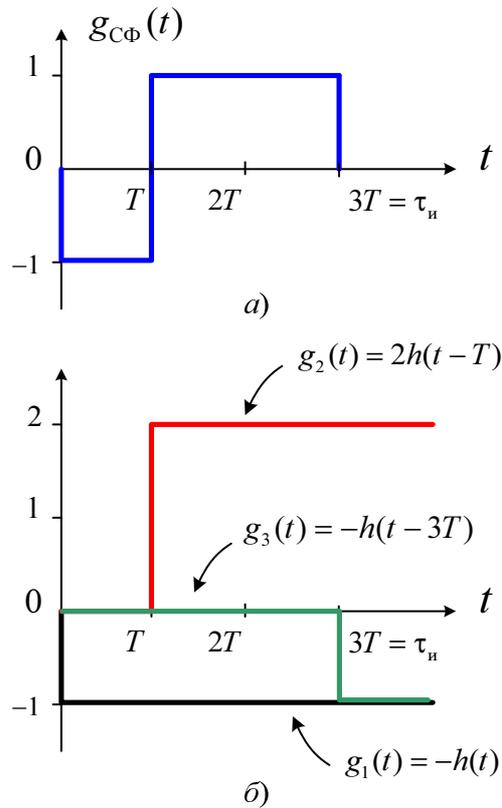


Рис. 3.36. Импульсная характеристика согласованного фильтра для кода Баркера

Для получения сдвинутой по времени ступенчатой функции используются элементы задержки, а для изменения уровня и знака – масштабные элементы. Суммирование функций выполняется с помощью сумматора. Структурная схема построенного таким образом СФ показана на рис. 3.37.

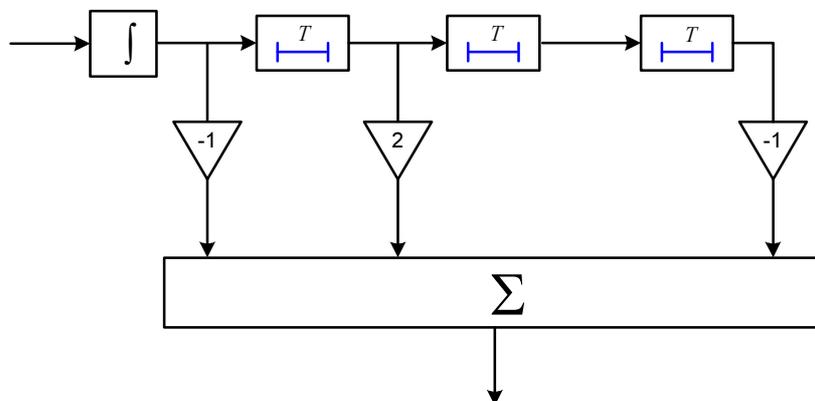


Рис. 3.37. Структурная схема согласованного фильтра для кода Баркера

Отклик фильтра, согласованного с модулирующей функцией кода Баркера, на сигнал имеет вид автокорреляционной функции, сдвинутой на длительность импульса $\tau_{и} = 3T$ (рис. 3.38). Ширина центрального максимума (так называемого главного лепестка) отклика СФ равна $2T$, т.е. в 3 раза (поскольку $N = 3$) меньше ширины всего отклика, равной $2\tau_{и} = 6T$. Структурная схема оптимального приёмника имеет такой же вид, как и в случае немодулированного радиоимпульса (рис. 3.32), разница будет лишь в структуре согласованного фильтра.

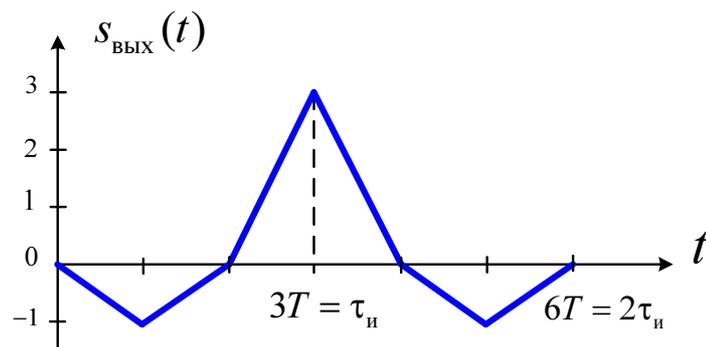


Рис. 3.38. Отклик согласованного фильтра для кода Баркера

Литература

1. **Тихонов В.И.** Оптимальный приём сигналов. / В.И.Тихонов. – М.: Радио и связь, 1983.
2. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции / Пер. с англ. под ред. В.И.Тихонова. – М.: Советское радио, 1972.